

МРНТИ 29.05.03; 29.05.09; 29.05.41

Бошкаев К.А., Байсеитов К.* , Бришева Ж. Н., Тлемисов А.

ННЛОТ, Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
Казахстан, г. Алматы, *e-mail: b.kasymkhan@mail.ru,

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ АКСИАЛЬНО СИММЕТРИЧНОГО ЦЕНТРАЛЬНОГО ТЕЛА В КЛАССИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

В статье рассматривается аксиально симметричное тело и исследуется его внутреннее и внешнее гравитационное поле в рамках классической теории тяготения. В качестве деформированного объекта используется сфероид Маклорена как пример объектов с однородной плотностью и твердотельным вращением, следовательно, аксиально симметричных тел. Гравитационный потенциал выводится из уравнения Пуассона для внешнего и внутреннего поля, удовлетворяя граничным условиям в центре, на поверхности тела и на бесконечности. Уравнение Пуассона решается аналитически и точно, применяя функцию Грина и разложения на сферические гармоники (шаровые функции). Помимо этого, в качестве примера приводится сшивание решений на поверхности тела для малых деформаций. В дополнении рассматривается квадрупольный момент деформированного центрального объекта и исследуется его влияние на движение пробных тел (частиц) в поле данного объекта, т.е. решается квазикеплерова задача в численном виде в программе Wolfram Mathematica. Было показано, что численные расчёты соответствуют аналитическому решению квазикеплеровой задачи в экваториальной плоскости орбиты. Также были проанализированы смещения перигелиев планет солнечной системы.

Статья преследует научно-методические и академические цели и предназначена для широкой аудитории студентов, магистрантов и докторантов по специальностям физика, механика и астрономия.

Ключевые слова: гравитационный потенциал, уравнение Пуассона, сфероид Маклорена, квазикеплерова задача, квадрупольный момент, смещение перигелия.

Boshkayev K. A., Baiseitov K.* , Brisheva Zh. N., Tlemisov A.

NNLOT, Al-Farabi Kazakh national university,
Kazakhstan, Almaty, *e-mail: b.kasymkhan@mail.ru

Investigation of the motion of test particles in the gravitational field of axially symmetric central body in classical physics

The article deals with an axially symmetric body and examines its internal and external gravitational field within the framework of classical theory of gravity. The Maclaurin spheroid is used as a deformed body to represent objects with homogeneous density and rigid rotation, hence, axially symmetric bodies. The gravitational potential is derived from the Poisson equation for the external and internal fields, satisfying the boundary conditions at the center, on the surface of the body, and at infinity. The Poisson equation is solved analytically and exactly, applying the Green's function and the expansion into spherical harmonics (spherical functions). Moreover, the matching on the surface of the body for small deformations is shown as an example. In addition, the quadrupole moment of a deformed central object is considered and its influence on the motion of test bodies (particles) in the field of a given object is investigated. The quasi-Kepler problem is solved numerically in the Wolfram Mathematica program. It was shown that numerical calculations correspond to the analytical solution of the quasi-Kepler problem

in the equatorial plane of the orbit. The perihelion shift of the planets of the solar system were also analyzed.

The article pursues scientific, methodological and academic goals and is intended for a wide audience of students, graduates and doctoral students in the specialties of physics, mechanics and astronomy.

Key words: Gravitational potential, Poisson equation, Maclaurin spheroid, quasicleple problem, quadrupole moment, perihelion displacement.

Бошкаев К. А., Байсеитов К. *, Бришева Ж. Н., Тлемисов А.

АТҰНЗ, Әл-Фараби ат. Қазақ ұлттық университеті,
Қазақстан, Алматы қ., *e-mail: b.kasymkhan@mail.ru

Аксиальды симметриялы орталық дененің гравитациялық өрісіндегі сынақ бөлшектерінің қозғалысын классикалық физикада зерттеу

Мақалада аксиальды симметриялы дене қарастырылады, сонымен бірге оның ішкі және сыртқы гравитациялық өрісі классикалық физика шеңберінде зерттеледі. Деформацияланған объекті ретінде тығыздығы біртекті және қаттыденелік айналуы бар Маклорен сфероиды пайдаланылады, осылайша аксиальды симметриялы дене қарастырылады. Гравитациялық потенциал сыртқы және ішкі өрістер үшін Пуассон теңдеуінен шығарылады, сондай-ақ дененің центрінде, бетінде және шексіздіктегі шектік шарттар қанағаттандырады. Пуассон теңдеуі Грин функциясын және сфералық гармоникаларды (сфералық функцияларды) қолдану арқылы аналитикалық түрде дәл шешіледі. Сонымен қатар, мысал ретінде аз деформациялар үшін дененің бетінде ішкі және сыртқы шешімдер жымдастырылады. Бұдан басқа, деформацияланған орталық дененің квадрупольдық моменті қарастырылады және осы объектінің өрісіндегі сынақ бөлшектердің қозғалысына әсері зерттеледі, яғни квазикеплер есебі Wolfram Mathematica бағдарламасында сандық түрде шешіледі. Сандық есептеулер квазикеплер есебінің орбитаның экваторлық жазықтығындағы аналитикалық шешіміне сәйкес келетіндігі көрсетілді. Сондай-ақ, күн жүйесіндегі планеталардың перигелий ығысу өрнегіне сараптама жасалды.

Мақала ғылыми, әдістемелік және академиялық мақсаттарды көздейді және физика, механика және астрономия мамандықтары бойынша студенттер, магистранттар мен докторанттарға арналған.

Түйін сөздер: гравитациялық потенциал, Пуассон теңдеуі, Маклаурин сфероиды, Квазиклел мәселесі, квадруполь сәті, перигелийдің ауысуы.

Введение

Как нам известно, теория гравитации, сформулированная Ньютоном справедлива в случае слабозаимодействующих гравитационных полей и малых, относительно скорости света, скоростей. Среди альтернативных теорий

только для гравитации Ньютона ($n = 2, \frac{1}{r^n} = \frac{1}{r^2}$)

возможны движения такие, как простые круговые, эллиптические, параболические и гиперболические формы орбит для наблюдаемых небесных тел, решения для которых, в рамках данной теории, различаются в начальных условиях, то есть в скоростях и координатах пробных тел. Можно упомянуть об еще одном значении ($n = -1, r$), которое соответствует закону Гука, что описывает изменения натяжение пружины. В случае $n = 3$ в системе отсутствует устойчивость: пробное тело или удаляется от центра на бесконечность, или просто, притягиваясь,

падает в центр. Несмотря на это уже в XIX веке точность астрономических измерений увеличилась настолько, что обнаружилось, что классическая теория гравитации (КТГ) Ньютона все-таки не стыкуется с наблюдениями [1].

Для наглядного примера выберем Меркурий, ближайшую к Солнцу планету, которая движется эллиптической орбите со значительным эксцентриситетом, что можно заметить поворот оси достаточно легко. Видно из наблюдений, что перигелий орбиты Меркурия за одну сотню лет смещается (поворачивается) на 574 угловых секунд в ту же сторону, что и направление движения планеты. Поворот на 531 угловых секунды за столетие был доказан Лаверьером, что данное смещение является следствием возмущения (влияния) другими планетами, главным образом Земли, Венеры и Юпитера. Может показаться, что оставшиеся 43 угловые секунды в одну сотню лет это маленькая величина, но она не давала покоя астрономам. Считалось, что это разница вполне могла бы быть объяснена

предположением, что Солнце не есть сфера, а сфероид с аксиальной симметрией (эллипсоид вращения). Такой вывод следует из наблюдений за полярным и экваториальным вращением Солнца. Стало известно, что скорость вращения на полюсах медленнее, чем на экваторе, что и приводит к сплюсненной форме Солнца, что и является причиной дополнительных составляющих в Ньютоновском потенциале [2]. Но, даже учёт деформации Солнца не смог полностью решить проблему 43 угловых секунд в столетие. Только с появлением новой теории гравитации было возможно объяснить наблюдательные аномалии в смещении перигелия Меркурия [3].

На сегодняшний день более общепринятой, надежной и одновременно экспериментально проверенной теорией гравитации является общая теория относительности (ОТО) Альберта Эйнштейна, которая была сформулирована в 1916 году. В литературе ОТО также известна как релятивистская теория гравитации (РТГ). По словам Ландау Л.Д. [4] «Она является, пожалуй, самой красивой из существующих физических теорий». Главные отличия теорий гравитации Ньютона и Эйнштейна состоят в следующем:

1. В КТГ трёхмерное пространство и одномерное время абсолютны, и они не зависят друг от друга, а в РТГ пространство и время образуют одно целое – четырёхмерный пространство-временной континуум.

2. В КТГ пространство и время вблизи массивных тел евклидовое, тогда как в РТГ пространство-время искривленное.

3. В КТГ взаимодействие передается мгновенно, т.е. скорость распространения бесконечна (так называемое дальнее действие), а в РТГ максимальная скорость взаимодействия не превышает скорости света в вакууме.

4. КТГ является предельным случаем РТГ для малых скоростей и слабых гравитационных полей, т.е. КТГ не может правильно описать движения тел, скорость которых близка к скорости света. Это исходит как следствие того факта, что уравнения движения Ньютона не инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца.

5. КТГ также не может правильно характеризовать сильные гравитационные поля компактных объектов, таких как нейтронные звезды, чёрные дыры и т.д. в следствии пунктов 2 и 4 [5].

6. В КТГ тела взаимодействуют посредством массы, а в РТГ посредством энергии, т.е. здесь

тождественность массы и энергии подразумеваются по умолчанию.

7. В РТГ гравитационное поле вращающегося тела отличается от классического аналога, так как вращение генерирует дополнительное гравитационное поле за счёт энергии вращения. Данный эффект в литературе известен как эффект Лензе-Тирринга или эффект увлечение системы отчёта [6].

8. В КТГ отсутствует понятие замедления времени в силу пункта 1, т.е. время везде протекает одинаково, а в РТГ данный эффект проявляется не только между движущимся и статическим наблюдателем, но и в присутствии гравитационного поля.

9. Все классические эффекты ОТО, возникшие в результате обобщения КТГ: смещение перигелия Меркурия, отклонения луча света вблизи Солнца и гравитационное красное смещение (гравитационное замедление времени) были экспериментально подтверждены астрономами и астрофизиками.

Поэтому ОТО является наиболее полной теорией гравитации. В добавок следует отметить, что в ОТО существуют объекты как чёрные дыры, гравитационные волны и более экзотические объекты, аналогов которых нет в КТГ Ньютона [2, 12 глава, 7-9]. Тем не менее, для достижения цели статьи достаточно использовать КТГ Ньютона в виду сложности и нелинейности уравнений Эйнштейна [10, 11]. Поэтому все выкладки будут производиться в рамках КТГ.

Статья организована следующим образом: в первом разделе решается уравнение Пуассона деформированного тела и находится внутренний потенциал гравитационного тела, во втором разделе также решается уравнение Пуассона вне тела. В третьем разделе, в качестве примера приводится методика сшивания внутреннего и внешнего решений, в частном случае, когда учитывается только масса и квадрупольный момент тела, а моменты более высокого порядка малости пренебрегаются. В четвёртом разделе квазикеплерова задача рассматривается численно для произвольного пробного тела и результаты представляются графически. Численные расчёты сопоставляются с аналитической формулой. В пятом разделе производится анализ формулы смещения перигелия планет солнечной системы. В заключении приводятся основные результаты исследования и подводятся итог.

Внутреннее решение уравнения гравитационного поля

Уравнение гравитационного поля (Пуассона) в КТГ задаётся в следующем виде [5]

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа, $\varphi = \varphi(x, y, z)$ – гравитационный потенциал, G – гравитационная постоянная, $\rho = \rho(x, y, z)$ – плотность распределения масс. Следует заметить, что уравнение Пуассона является предельным случаем уравнений гравитационного поля Эйнштейна в ОТО для малых скоростей и слабых полей. Методика решения уравнений Эйнштейна требует глубокого знания в тензорных исчислениях и дифференциальной геометрии. Все известные точные решения уравнений поля перечислены в монографии Stephani et al [12] и в трудах [13-17].

Рассмотрим решение уравнения Пуассона для аксиально-симметричного тела. Известно, что в произвольной точке $\{x, y, z\}$ внутри однородного сфероида (эллипсоида), т.е. для $\rho = const$, гравитационный потенциал является квадратичной функцией координат и общее решение уравнения Пуассона можно искать в следующем виде [18-19]:

$$\varphi = -\pi G\rho(A_0 - A_1x^2 - A_2y^2 - A_3z^2), \tag{2}$$

где постоянные A зависят только от формы эллипсоида, и $\sum_{i=1}^3 A_i = 2$, который следует из уравнения (1).

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^2}} = \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\gamma + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\gamma) = \\ &= \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\theta) P_l(\cos\theta') + 2 \sum_{m=-l}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos\theta) P_l^m(\cos\theta') \cos(m(\varphi - \varphi')), \quad \left(\frac{r'}{r} < 1\right), \end{aligned}$$

где все координаты (радиус вектора и углы) приведены на рисунке 1.

Чтобы упростить сложные математические вычисления для уравнения (1) можно записать общее решение. Для этого введем систему координат с началом в произвольной точке внутри системы. Потенциал поля, создаваемого всеми телами в точке с радиус-вектором \vec{r} , равен:

$$\varphi = -G \sum \frac{m_a}{|\vec{r} - \vec{r}'_a|}, \tag{3}$$

где m_a, r'_a – масса и радиус-вектор частицы с номером a соответственно.

Можно заменить суммирование интегрированием по объему, если масса распределена непрерывно и ограничена в объеме V'

$$\varphi = -G\rho \int \frac{d^3x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \tag{4}$$

где переменная интегрирования $d^3x' = dV' = dx'dy'dz'$ есть элемент объема.

Интеграл в сферических координатах имеет вид:

$$\int \frac{d^3x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int_0^R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r'^2 dr' \sin\theta' d\theta' d\phi'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \tag{5}$$

где $0 \leq r' \leq R, 0 \leq \theta' \leq \pi, 0 \leq \phi' \leq 2\pi$, в свою очередь $R = R(\theta')$ определяется через уравнение поверхности эллипсоида вращения (см. далее уравнение (10)) [5, 18].

Знаменатель предыдущего выражения раскладывается по ортогональным функциям как [20]:

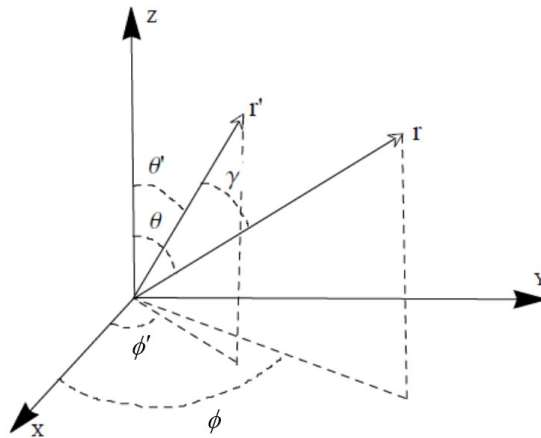


Рисунок 1 – Сферическая система координат

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2}} = \frac{1}{r' \sqrt{1 - 2\left(\frac{r}{r'}\right) \cos \gamma + \left(\frac{r}{r'}\right)^2}} = \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^l P_l(\cos \gamma) =$$

$$= \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^l P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta') \cos(m(\phi - \phi')), \quad \left(\frac{r'}{r} > 1\right),$$

где $P_l(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра, а $P_l^m(\cos \theta)$ – присоединённые полиномы Лежандра [21, 22].

Поскольку нас интересуют только аксиально симметричные решения, то автоматически можно пренебречь членами, зависящими от угла ϕ . Тогда знаменатель (5) будет в виде [20]:

$$\frac{1}{|r - r'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r'^{l+1}} P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta'), \quad \text{при } (r < r'), \quad (6)$$

$$\frac{1}{|r - r'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta'), \quad \text{при } (r > r'). \quad (7)$$

Подставляя в уравнение (4) и используя сферические координаты, получаем:

$$\phi = -G\rho \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} P_l(\cos \theta') \left\{ \int_0^r \frac{r'^l}{r'^{l+1}} dr' + \int_r^{R(\theta')} \frac{r'^l}{r'^{l+1}} dr' \right\} r'^2 \sin \theta' d\theta'. \quad (8)$$

Следует заметить, что внутри тела $0 \leq r, r' \leq R(\theta')$, поэтому при интегрировании необходимо было разделить интеграл на две

части с пределами $0 \leq r' \leq r$ и $r \leq r' \leq R(\theta')$. Затем, проинтегрировав выражение по ϕ и умножив скобки на r'^2 , получим:

$$\phi = -2\pi G\rho \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \int_0^{\pi} P_l(\cos \theta') \left\{ \int_0^r \frac{r'^l}{r'^{l+1}} dr' + \int_r^{R(\theta')} \frac{r'^l}{r'^{l+1}} dr' \right\} r'^2 \sin \theta' d\theta' \quad (9)$$

Здесь следует учесть, что $P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d(\cos \theta)^l} (\cos^2 \theta - 1)^l$.

Заметим, что все члены с нечётным l выпадают, так как P_l является нечетной функцией $\cos \theta'$, в то время как $R(\theta')$ – чётная функция. Среди интегралов отличны от нуля только т.е., в которых $l = 0$ или $l = 2$. В этом можно убедиться, рассмотрев выражение для $R(\theta')$, которое находится из уравнения поверхности эллипсоида вращения [5]

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (10)$$

где a и c большая и малая полуоси эллипсоида, которые показаны на рисунке 2 (а). С переходом в сферические координаты

$$\begin{cases} x = R(\theta') \sin \theta' \cos \phi, \\ y = R(\theta') \sin \theta' \sin \phi, \\ z = R(\theta') \cos \theta', \end{cases} \quad (11)$$

уравнение поверхности принимает следующий вид:

$$\frac{\sin^2 \theta'}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta'}{c^2} = \frac{1}{R^2(\theta')}. \quad (12)$$

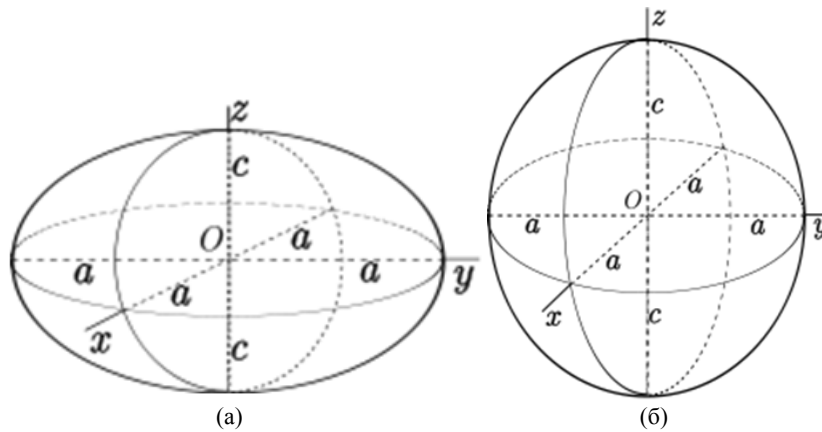


Рисунок 2 – (а) сплюснутый сфероид $a > c$, (б) продолговатый сфероид $a < c$

Соответственно из-за этой зависимости, т.е. из-за соотношения ортогональности, все члены в

сумме с $l \geq 4$ степени $\cos \theta'$ обращаются в нуль при интегрировании. Итак, мы имеем:

$$\begin{aligned} \phi = & -2\pi G \rho \left[\int_0^\pi \sin \theta' \left\{ \int_0^r \frac{r'^2}{r} dr' + \int_r^{R(\theta')} r' dr' \right\} d\theta' + \right. \\ & \left. + \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{4} \right) \int_0^\pi (3 \cos^2 \theta' - 1) \left\{ \int_0^r \frac{r'^4}{r^3} dr' + \int_r^{R(\theta')} \frac{r'^2}{r'} dr' \right\} \sin \theta' d\theta' \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Интегрируя по r' получаем:

$$\phi = -2\pi G\rho \left\{ -\frac{r^2}{3} + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)t^2} + \frac{r^2}{20} (3\cos^2\theta - 1) \int_{-1}^1 (3t^2 - 1) \left[1 + 5 \ln \left[\frac{1}{r} \left(\frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) t^2 \right) \right] \right] dt \right\} \quad (14)$$

где $t = -\cos\theta'$. Тогда после некоторых несложных математических вычислений интеграл примет окончательный вид в сферической системе координат [23]:

$$\phi = -2\pi G\rho \left\{ -\frac{r^2}{3} + \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{e} \arcsin e + \frac{r^2}{6} (3\cos^2\theta - 1) \left(\frac{3\sqrt{1-e^2}}{e^3} \arcsin e - \frac{3-e^2}{e^2} \right) \right\} \quad (15)$$

Далее, переходя к декартовой системе координат, заменяя для этого $\cos\theta = \frac{z}{r}$ и $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, и сравнивая с (2), находим коэффициенты [23]

$$A_0 = \frac{2a^2\sqrt{1-e^2}}{e} \arcsin e, \\ A_1 = A_2 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \arcsin e - \frac{1-e^2}{e^2},$$

$$A_3 = 2\frac{1}{e^2} - 2\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \arcsin e,$$

где эксцентриситет эллипсоида вращения, по определению, равен:

$$e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} \quad (16)$$

Подставляя коэффициенты в (2) получаем окончательный вид внутреннего потенциала в декартовой системе координат

$$\phi = -\pi G\rho \left[\frac{2a^2\sqrt{1-e^2}}{e} \arcsin e - \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \arcsin e - \frac{1-e^2}{e^2} \right) (x^2 + y^2) - 2 \left(\frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \arcsin e \right) z^2 \right] \quad (17)$$

Поведение коэффициентов A для малой деформации $\sim e^2$:

$$A_0 \approx 2a^2 \left(1 - \frac{e^2}{3} \right); \\ A_1 = A_2 \approx \frac{2}{3} \left(1 - \frac{e^2}{5} \right); \\ A_3 \approx \frac{2}{3} \left(1 + \frac{2e^2}{5} \right); \quad (18)$$

Эти выражения будут необходимы в дальнейшем для проверки условия сшиваемости внутреннего потенциала с внешним потенциалом [23].

Внешнее решение уравнения гравитационного поля

Вычисление внешнего потенциала аналогично внутреннему потенциалу. Для этого нужно принять во внимание условие $0 \leq r' \leq R(\theta') \leq r$, тогда интеграл (9) запишется как

$$\varphi = -2\pi G\rho \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \int_0^{\pi} P_l(\cos\theta') \int_0^{R(\theta')} \frac{r'^{l+2}}{r^{l+1}} dr' \sin\theta' d\theta' \quad (19)$$

Очевидно, что интегрирование по r' не составит особого труда

$$\phi = -\frac{2\pi G\rho}{r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \frac{1}{(l+3)r^l} \int_1^{-1} P_l(\cos\theta') R^{l+3}(\theta') d\cos\theta' \quad (20)$$

Однако интегрирование по $\cos\theta'$ не так тривиально и решение будет представлять собой сходящийся ряд

$$\phi = \frac{4\pi G}{3r} \rho a^2 c \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \frac{3(-1)^{\frac{l}{2}+1}}{(l+1)(l+3)} \left(\frac{ae}{r}\right)^l \quad (21)$$

где l теперь принимает только чётные числа. Следует подчеркнуть, что здесь, прежде чем проинтегрировать, сначала нужно открыть сумму хотя бы для первых десяти слагаемых, чтобы установить общую тенденцию (формулу).

Только после этого необходимо проинтегрировать каждую слагаемую по отдельности и снова собрать в единую сумму.

Зная полную массу эллипсоида [5]

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho a^2 c, \quad (22)$$

и введя новую величину как [23]

$$J_l = \frac{3(-1)^{\frac{l}{2}+1}}{(l+1)(l+3)} e^l, \quad (23)$$

внешний потенциал будет иметь следующий вид

$$\varphi = \frac{GM}{r} \sum_{l=0}^{\infty} J_l \left(\frac{a}{r}\right)^l P_l(\cos\theta) = -\frac{GM}{r} \left(1 - \sum_{l=2}^{\infty} J_l \left(\frac{a}{r}\right)^l P_l(\cos\theta)\right) \quad (24)$$

Покажем, что формула (24) эквивалентна формуле внешнего потенциала для деформированного тела из Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. [4] при $l=2$. Тогда коэффициент J_2 и потенциал φ примут вид

$$J_2 = \frac{1}{5} e^2, \quad \varphi \approx -\frac{GM}{r} \left(1 - \frac{1}{5} e^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\cos\theta)\right). \quad (25)$$

Запишем теперь приближённый потенциал из Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. (Том 2 §41 и §99) [4]

$$\begin{aligned} \phi &\approx -\frac{GM}{r} - \frac{GD}{2r^3} P_2(\cos\theta) = \\ &= -\frac{GM}{r} \left(1 + \frac{D}{2Mr^2} P_2(\cos\theta)\right), \end{aligned} \quad (26)$$

где D – квадрупольный момент эллипсоида вращения, определенный

$$D = D_{zz} = -2D_{xx} = -2D_{yy}, \quad (27)$$

как компонента тензора квадрупольного момента

$$D_{ik} = \int \rho(3x_i x_k - r^2 \delta_{ik}) dV, \quad (28)$$

сумма диагональных элементов которого равна $D_{ii} = 0$, где $i, k = 1, 2, 3$ и $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$. Следовательно

$$\begin{aligned} D = D_{zz} &= \int \rho(3z^2 - r^2) dV = \\ &= \rho \int (2z^2 - x^2 - y^2) dx dy dz \end{aligned} \quad (29)$$

Выбираем оси координат вдоль осей эллипсоида с началом в его центре. Преобразованием

$$x = x'a, \quad y = y'a, \quad z = z'c \quad (30)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1,$$

интегрирование по объёму эллипсоида, где уравнение поверхности по-прежнему определяется через (10)

сводится к интегрированию по объёму сферы радиуса 1

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \quad (31)$$

тогда

$$D = \rho a^2 c \int_{-\sqrt{1-x'^2-y'^2}}^{\sqrt{1-x'^2-y'^2}} \int_{-\sqrt{1-x'^2}}^{\sqrt{1-x'^2}} \int_{-1}^1 (2c^2 z'^2 - a^2 x'^2 - a^2 y'^2) dx' dy' dz' \quad (32)$$

Данный интеграл также можно легко вычислить в сферической системе координат. В любом случае получится одинаковый результат [4]

$$\begin{aligned} D &= \frac{8\pi}{15} \rho a^2 c (c^2 - a^2) = \\ &= -\frac{2}{5} Ma^2 e^2 = -2Ma^2 J_2 \end{aligned} \quad (33)$$

Отсюда видно, что для сплюснутого эллипсоида $c < a$, $D < 0$ и для продолговатого

эллипсоида $c > a$, $D > 0$. Подставив квадрупольный момент в уравнение (26), можно увидеть, что решения эквивалентны.

Сшивание внутреннего решения с внешним решением

Приближённое решение для внутреннего потенциала эллипсоида при малых e было показано в первом разделе. Эквивалентная запись в декартовой системе координат:

$$\phi \approx -\frac{3GM}{4a^2c} \left[2a^2 \left(1 - \frac{e^2}{3} \right) - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{e^2}{5} \right) (x^2 + y^2) - \frac{2}{3} \left(1 + \frac{2e^2}{5} \right) z^2 \right], \quad (34)$$

где по-прежнему $e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}$.

Итак, зная приближенное решение внутреннего потенциала, его можно сшить (сравнить) с внешним решением в любой точке на поверхности сфероида. Для простоты рассмотрим точки, когда радиус-вектор принимает одно

из следующих значений $r(x, y, z) = r(a, 0, 0)$, $r(x, y, z) = r(0, a, 0)$ или $r(x, y, z) = r(0, 0, c)$. В общем случае можно выбрать любую произвольную точку на поверхности эллипсоида, заданной уравнением (10). Для наглядного примера выбираем последний вариант $r(x, y, z) = r(0, 0, c)$ в этом случае внутренний потенциал

$$\phi \approx -\frac{3GM}{4a^2c} \left[a^2 \left(1 - \frac{e^2}{3} \right) - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2e^2}{5} \right) c^2 \right] \approx -\frac{GM}{c} \left(1 - \frac{e^2}{5} \right), \quad (35)$$

Соответственно приближенный внешний потенциал (25) в рассматриваемой точке с учётом $\cos \theta = \frac{z}{r} = 1$ будет равен

$$\begin{aligned} \phi &\approx -\frac{GM}{c} \left(1 - \frac{1}{5} e^2 \left(\frac{a}{c} \right)^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right) \approx \\ &\approx -\frac{GM}{c} \left(1 - \frac{e^2}{5} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

Отсюда следует, что внутренний и внешний потенциалы на поверхности эллипсоида сшиваются при малых e , т.е. приближённо. Это связано с тем, что решение для внутреннего потенциала записывается с помощью элементарных функций, тогда как для пустого пространства оно имеет вид сходящегося бесконечного ряда, точность которого определяется количеством последующих слагаемых в сумме, т.е. чем больше слагаемых, тем выше точность. К сожалению, внешний потенциал никак не выражается через элементарные функции. Поэтому при сшивании решений приходится задавать (требовать) определенное приближение.

Квазикеплерова задача

В этом разделе рассмотрим квазикеплерову задачу в КТГ. Если кеплерова задача (или задача Кеплера) – это задача движения пробного тела в гравитационном поле [24]

$$\varphi \approx -\frac{GM}{r} \quad (37)$$

то, квазикеплерова задача – это задача движения пробного тела в поле [24-25]

$$\varphi \approx -\frac{GM}{r} + \delta\varphi \quad (38)$$

причём $\delta\varphi \ll \varphi$ и

$$\delta\varphi \sim \frac{1}{r^3} \quad (39)$$

Кеплерова задача описывает движение отдельной планеты вокруг Солнца, и её решение является теоретическим обоснованием известных законов Кеплера в астрономии. Следует заметить, что решение кеплеровой задачи приведено во многих учебниках включая Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. [24]. Поэтому здесь мы не будем рассматривать аналитический вывод решения. Касательно квазикеплеровой задачи в литературе совсем немного сведений, хотя вывод решений также имеется [24-26]. Следовательно, мы будем рассматривать квазикеплерову задачу численно и использовать окончательную аналитическую формулу для анализа результатов задачи.

Поскольку, по определению, поправка к потенциалу зависит только от модуля радиуса

вектора $\delta\varphi = \delta\varphi(r)$, то соответственно квазикеплерову задачу достаточно будет рассмотреть в двумерном пространстве, т.е. в плоскости орбиты пробного тела. Центральным телом будет Солнце. Для численных расчётов необходимо будет знать массу, радиус и квадрупольный момент Солнца. Пробным телом будет любой объект, размером и массой которого можно пренебречь. Соответственно орбитальные параметры (начальные координаты и скорости) пробного тела будут выбраны так, чтобы можно было продемонстрировать влияние квадрупольного момента Солнца на движения и смещение перигелия пробного тела. Обычно для исследования движения планет вместо квадрупольного момента используют квадрупольный параметр (см уравнение (33)), который непосредственно измеряется при проведении наблюдений

$$J_2 = -\frac{D}{2Ma^2}, \quad (40)$$

где $M = M_\odot$ – масса и $a = R_\odot$ – радиус Солнца. Числовые значения квадрупольного параметра Солнца перечислены в таблице 1. Поскольку все J_2 почти одинаковые, то можно выбрать любое значение.

Таблица 1 – числовые значения параметра J_2 для Солнца

J_2	Литература
$(2.18 \pm 0.06) \cdot 10^{-7}$	Pijpers (1998) [27]
$(1.6 \pm 0.04) \cdot 10^{-7}$	Godier and Rozelot (1999) [28]
$(2.2 \pm 0.1) \cdot 10^{-7}$	Will (2014) [29]
$(2.3 \pm 0.25) \cdot 10^{-7}$	Fienga et al. (2015) [30]
$(2.25 \pm 0.09) \cdot 10^{-7}$	Park et al. (2017). [31]

Выберем плоскость орбиты xu . Значит необходимо положить $\theta = \frac{\pi}{2}$ формуле (26).

Тогда потенциал поля для квазикеплеровой задачи будет иметь следующий вид:

$$\varphi = -\frac{GM}{r} + \frac{GD}{4r^3} \quad (41)$$

Второй член суммы, зависящий от третьей степени модуля радиус-вектора – есть поправка на квадрупольный момент источника поля. Для

простоты предположим, что центральное тело не движется и находится в начале координат.

Для численного анализа квазикеплеровой задачи запишем силу гравитационного поля как масса движущегося тела, умноженная на градиент потенциала

$$\vec{F}_G = -m \operatorname{grad}\varphi = -\frac{GMm}{r^3} \vec{r} + \frac{3}{4} \frac{GDm}{r^5} \vec{r}, \quad (42)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -\frac{GM}{(x^2(t) + y^2(t))^{\frac{3}{2}}} x(t) + \frac{3}{4} \frac{GD}{(x^2(t) + y^2(t))^{\frac{5}{2}}} x(t), \\ \ddot{y}(t) = -\frac{GM}{(x^2(t) + y^2(t))^{\frac{3}{2}}} y(t) + \frac{3}{4} \frac{GD}{(x^2(t) + y^2(t))^{\frac{5}{2}}} y(t). \end{cases} \quad (44)$$

Чтобы численно решить систему уравнений нужно, во-первых, задать числовые значения всех физических величин, включая массу Солнца, гравитационную постоянную, среднее расстояние между Солнцем и пробным телом. Для наглядности данное расстояние выберем как 15 радиусов Солнца. Период вращения пробного тела вокруг Солнца можно легко вычислить, приравняв центробежную силу к силе притяжения. Таким же образом можно получить орбитальную скорость пробного тела. Везде мы будем делать расчеты в международной системе единиц SI. Во-вторых, необходимо ввести начальные условия, т.е. начальные координаты и начальные скорости пробного тела. Например,

$$\begin{aligned} x(0) &= 15 \cdot 6.9551 \cdot 10^8, \\ y(0) &= 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 45122. \end{aligned} \quad (45)$$

Численное решение можно получить с помощью программы Wolfram Mathematica [32] и показать в виде траектории движения пробной частицы в плоскости xu . На рисунке 3 траектория движения была рассчитана на несколько оборотов вокруг Солнца. Как видно из рисунка, за это время траектория пробного тела практически не изменилась. Форма и плоскость орбиты остаются неизменными.

Для получения заметного эффекта нужно искусственно преувеличить значения квадрупольного момента. Простой анализ эксцентриситета $e = \sqrt{5J_2}$ приводит к значению $\sim 10^{-3}$ для любых J_2 показанных в таблице 1, т.е. в этом

случае можно считать, что Солнце почти идеальная сфера. Поэтому нет никакого существенного изменения в траектории движения пробного тела. Чтобы явно проиллюстрировать влияние квадрупольного момента можно в качестве примера выбрать соотношение полярного радиуса к экваториальному радиусу приблизительно

$$\vec{F}_N = m \ddot{\vec{r}} \quad (43)$$

$\frac{c}{a} \approx 0.9$, тогда эксцентриситет будет

$$e = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} \approx 0.436$$

и соответственно нужно увеличить значение квадрупольного параметра J_2 (или момента D) почти в 170 000 раз! На рисунке 4 показано движение пробного тела вокруг искусственно сплюснутого Солнца с преувеличенным квадрупольным моментом.

увеличить значение квадрупольного параметра J_2 (или момента D) почти в 170 000 раз! На рисунке 4 показано движение пробного тела вокруг искусственно сплюснутого Солнца с преувеличенным квадрупольным моментом.

увеличить значение квадрупольного параметра J_2 (или момента D) почти в 170 000 раз! На рисунке 4 показано движение пробного тела вокруг искусственно сплюснутого Солнца с преувеличенным квадрупольным моментом.

увеличить значение квадрупольного параметра J_2 (или момента D) почти в 170 000 раз! На рисунке 4 показано движение пробного тела вокруг искусственно сплюснутого Солнца с преувеличенным квадрупольным моментом.

увеличить значение квадрупольного параметра J_2 (или момента D) почти в 170 000 раз! На рисунке 4 показано движение пробного тела вокруг искусственно сплюснутого Солнца с преувеличенным квадрупольным моментом.

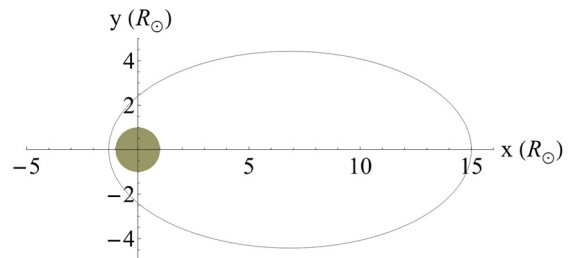


Рисунок 3 – Траектория движения пробного тела вокруг Солнца. Размеры орбиты показаны в единицах радиуса Солнца. Начальные данные пробного тела заданы в (45). Квадрупольный параметр Солнца $J_2 = 2.25 \cdot 10^{-7}$

Как видно из рисунка 4, траектория движения была рассчитана на несколько оборотов

вокруг сплюснутого Солнца. За это время форма орбиты не изменилась. Однако плоскость орбиты поворачивается против часовой стрелки, т.е. в сторону направления начальной скорости. В отсутствие квадрупольного момента, вращения плоскости орбиты и, следовательно, смещение перигелия планет исчезает, о чём свидетельствует формула

$$\delta\psi = -\frac{3\pi D}{2MP^2} \quad (46)$$

где $\delta\psi$ – угол смещения перигелия и P – параметр орбиты пробного тела. Данная формула является аналитическим решением квазикеплеровой задачи и приведена в [24], и так же была воспроизведена другими методами [26]. Параметр орбиты выражается через орбитальный момент импульса L и массу пробного тела m

$$P = \frac{L^2}{Gm^2M} \quad (47)$$

где $L = m(x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)) = const$ сохраняющаяся величина, которую можно найти через начальные условия [24]. Следовательно, используя начальные условия рисунка 4, можно посчитать, что угол смещения перигелия за один полный оборот будет $\delta\psi \approx 6.3 \cdot 10^{-2}$ радиан или в градусах 3.6° . Данный угол можно также посчитать численно. Для этого необходимо вычислить либо расстояния между двумя афелиями и до них от Солнца (фокуса эллипса), либо аналогично только для перигелия. Зная эти расстояния, угол можно найти через теорему косинусов. В результате численного анализа получилось $\delta\psi \approx 6.4 \cdot 10^{-2}$ радиан и в градусах 3.7° . Небольшое расхождение связано с нарушением условия $\delta\varphi \ll \varphi$ в непосредственной близости к Солнцу. Чем дальше находится перигелий орбиты, тем меньше разница между аналитической формулой и численным расчётом.

Интересно сравнить полученный результат с релятивистской формулой смещения перигелия планет, которую Эйнштейн рассчитал и применил для Меркурия [2-4, 7-11, 33-34]

$$\delta\psi = \frac{6\pi GM}{Pc^2} \quad (48)$$

где c – скорость света в вакууме. Тогда значение угла смещения для пробного тела в поле Солнца будет $\delta\psi = 1.67 \cdot 10^{-5}$ радиан за один оборот. Это значение на три порядка меньше, чем для квазикеплеровой задачи с искусственно сплюснутым Солнцем. Если Солнце считать сферой, то релятивистские поправки будут играть ключевую роль. Если Солнце считать эллипсоидом вращения, то нужно аккуратно посчитать угол смещения и сравнить с релятивистской формулой, только тогда будет ясно какой эффект доминирует.

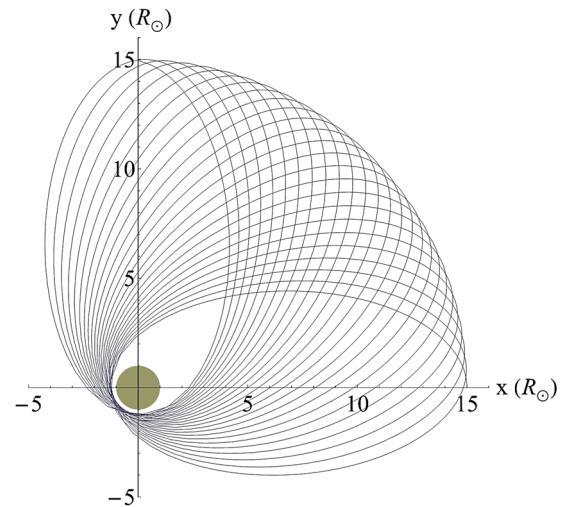


Рисунок 4 – Траектория движения пробного тела вокруг Солнца. Размеры орбиты показаны в единицах радиуса Солнца. Начальные данные пробного тела заданы в (45). Преувеличенный квадрупольный параметр искусственно сплюснутого Солнца $J_2 = 3.825 \cdot 10^{-2}$

Анализ смещение перигелия планет

В этом разделе проведем анализ углов смещения перигелиев Меркурия, Венеры и Земли. Формула Эйнштейна (48) была также воспроизведена для аксиально-симметричного объекта с квадрупольным моментом [26].

$$\delta\psi = \frac{6\pi GM}{Pc^2} - \frac{3\pi D}{2MP^2} - \frac{15\pi GD}{4P^3c^2} (1 + \varepsilon^2) \quad (49)$$

где ε – эксцентриситет орбиты планет, первый член – это эйнштейновская поправка за счёт искривления пространства-времени, второй член – это классическая поправка за счёт деформации тела и третий член – это совместный вклад релятивистских и классических

эффектов. Для планет солнечной системы третьим членом можно пренебречь в силу ничтожной малости поправки. При $D \rightarrow 0$, получим классическую формулу Эйнштейна (48), а при $c \rightarrow \infty$, получим решение квазикеплеровой задачи (46). В таблице 2 приведены орбитальные параметры Меркурия, Венеры и Земли, а также вычислены каждые составляющие формулы (49) за 100 земных лет [3, 7].

Так, для Земли получим $0,0384''$ за один оборот, т. е. за год. Иначе говоря, $3,84''$ в столетие. Для Меркурия смещение перигелия за столетие получается значительно больше (а именно $43''$), во-первых, потому, что он находится значительно ближе к Солнцу (радиус его орбиты составляет $0,39$ радиуса орбиты Земли) и, во-вторых, потому, что он обращается быстрее (за столетие он успевает совершить около 415 обращений). Аналогичная ситуация с Венерой – за столетие она успевает совершить около 162 обращений вокруг Солнца. Как видно из таблицы 2, для планет солнечной системы эйнштейновская поправка превосходит в разы поправку с квадрупольным моментом Солнца [7].

Таблица 2 – Орбитальные параметры и углы смещения перигелиев Меркурия, Венеры и Земли за столетие [35-37]

Планеты	Меркурий	Венера	Земля
Большая полуось орбиты A (км)	57909082	108208600	149597870
Эксцентриситет орбиты ε	0.2056	0.0068	0.0167
Параметр орбиты $P = A(1 - \varepsilon^2)$	55460308	108203681	149556105
Сидерический период обращения	87.968	224.695	365.242
$\frac{6\pi GM}{Pc^2}$	$43''$	$8.63''$	$3.84''$
$\frac{3\pi D}{2MP^2}$	$0.03''$	$0.003''$	$0.001''$
Наблюдения	$(43.11 \pm 0.45)''$	$(8.4 \pm 4.8)''$	$(5.0 \pm 1.2)''$

В целом, при сравнении теории с опытом необходимо помнить, что движение перигелия происходит не только в силу эйнштейновского эффекта, но и в силу возмущающего влияния других планет, отклонения их формы от сферической и т. д. Как было упомянуто во введении

статьи, эти поправки превышают эйнштейновскую во много раз. Кроме того, нужно иметь в виду, что положение перигелия наблюдать тем труднее, чем меньше эксцентриситет, т. е. чем ближе орбита к кругу; при $\varepsilon \rightarrow 0$ положение перигелия перестает быть определенным. Тем не менее, астрономические средства наблюдения настолько точны и вычислительные возможности небесной механики настолько велики, что, в случае Меркурия, необъясненный ньютоновой теорией остаток в движении перигелия определяется с точностью до секунды в столетие. Этот остаток составляет приблизительно $42,6''$, в прекрасном согласии с теорией. Для Земли остаток определяется с несколько меньшей точностью и составляет около $4''$, что также вполне согласуется с эйнштейновским значением [1, 7].

Заключение

В данной статье были показаны аналитические вычисления внутреннего и внешнего потенциалов гравитационного поля для аксиально-симметричных деформированных объектов в классической теории гравитации. Методика вывода была изложена во всех подробностях.

Продемонстрирована процедура сшивания внутреннего и внешнего решений уравнения Пуассона на поверхности эллипсоида вращения.

Было исследовано движение пробного тела в гравитационном поле деформированного объекта. Так же было показано влияние квадрупольного момента на траекторию движения и смещения перигелия пробного тела.

Формула Эйнштейна была проанализирована для внутренних планет солнечной системы. Было показано, что квадрупольный момент Солнца вносит незначительный вклад в движение планет. Все аналитические и численные расчёты были проведены в программе Wolfram Mathematica.

Было бы интересно проанализировать движение пробного тела по орбите отличающейся от экваториальной плоскости. Так-как указанная задача выходит за рамки предоставленной статьи, в планах рассмотреть ее в будущих работах.

Благодарность. Работа была выполнена при поддержке программы «Фундаментальные и прикладные исследования в смежных областях физики земных, околоземных и атмосферных процессов и их практическое применение», ИРН: BR05236494.

Литература

- 1 Roseveare N.T. Mercury's Perihelion from Le Verrier to Einstein. – Oxford University Press, 1982. – 208 p.
- 2 Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. Gravitation. – San Francisco: W.H. Freeman Press 1973. – 1278 p.
- 3 Ohanian H.C. and Ruffini R. Gravitation and Spacetime, 3rd Edition. – Cambridge University Press, Cambridge, England, 2013. – 528 p.
- 4 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. 8-е изд. – М.: Физматлит, 2006. – 536 с.
- 5 Шапиро С., Тьюколски С. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Монография. – М.: Мир, 1985. – 300 с.
- 6 Lense J., Thirring H. // Phys. Z. 19, 156 (1918).
- 7 Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: Наука, 1961. – 569 с.
- 8 Wald R.M. General Relativity. – The University of Chicago Press, 1984. – 473 p.
- 9 Hobson M.P., Efstathiou G.P., Lazenby A.N. General Relativity, An Introduction for Physicists. – Cambridge University Press, 2006. – 592 p.
- 10 Ryder L. Introduction to General Relativity. – Cambridge University Press, 2009. – 460 p.
- 11 Schutz B.F. A First course in General Relativity. – Cambridge University Press. 2009. – 412 p.
- 12 Stephani H., Kramer D., MacCallum M.A.H., Hoenselaers C., and Herlt E. Exact Solutions of Einstein's Field Equations. – Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
- 13 Quevedo H., Mashhoon B. Exterior gravitational field of a rotating deformed mass // Physics Letters A. –1985. –Vol. 109 (1, 2). – P. 13-18.
- 14 Quevedo H., Mashhoon B. Exterior gravitational field of a charged rotating mass with arbitrary quadrupole moment // Physics Letters A. –1990. –Vol. 148. – P.149-153.
- 15 Pachon L.A., Rueda J.A., Sanabria-Gomez J.D. Realistic exact solution for the exterior field of a rotating neutron star // Phys.Rev.D – 2006. – Vol.73. – 104038.
- 16 Manko V.S., Sanabria-Gomez J.D., Manko O.V. Nine-parameter electrovac metric involving rational functions // Phys. Rev. D. – 2000. – Vol 62. – 044048.
- 17 Boshkayev K., Quevedo H., Ruffini R. Gravitational Field of Compact Objects in General Relativity // Physical Review D. – 2012. – Vol. 86. – 064043.
- 18 Chandrasekhar S. Ellipsoidal Figures of Equilibrium. – Yale University Press, New Haven, CT, 1967.
- 19 Meinel R., Ansorg M., Kleinwachter A., Neugebauer G., Petroff D. Relativistic Figures of Equilibrium. – Cambridge University Press, Cambridge, England, 2008.
- 20 Jackson J.D. Classical Electrodynamics (3rd ed.). – New York: John Wiley & Sons, 1999.
- 21 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
- 22 Abramowitz M., Stegun I.A. Handbook of Mathematical Functions. – New York: Dover Publications, Inc., 1972. – 1044 p.
- 23 Poisson E., Will C.M. Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, relativistic. – Cambridge: Cambridge University Press, 2014.
- 24 Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Том I. Механика. 5-е изд., – М.: Физматлит, 2012. – 224 с.
- 25 Абдильдин М.М. Проблема движения тел в общей теории относительности. – Алматы: Қазақ Университеті, 2006. – 132 с.
- 26 Бошкаев Қ.А., Қалымова Ж.А., Абдуалиева Н.С., Бришева Ж.Н., Таукенова А.С. Аксиалды-симметриялы гравитациялық өрістің экваторлық жазықтығында сынақ дененің қозғалысын адиабаттық теория арқылы зерттеу// ҚазҰУ Хабаршы. – 2018. – №1 (64). – Б. 67-80.
- 27 Pijpers F.P. Helioseismic determination of the solar gravitational quadrupole moment // Mon. Not. R. Astron. Soc. – 1998. – Vol. 297. – L76–L80.
- 28 Godier S., Rozelot J. Quadrupole moment of the Sun. Gravitational and rotational potentials // Astron. Astrophys – 1999. – Vol. 350. – P.310–317.
- 29 Will C.M. The Confrontation between General Relativity and Experiment // Living Reviews in Relativity. – 2014. – Vol.17:4. – 117 p.
- 30 Fienga A., Manche H., Laskar J., Gastineau M. // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2015. – Vol.123. – P.325.
- 31 Park R.S., Folkner W.M., Konopliv A.S., et al. // Astrophysical Journal. – 2017. – Vol.153, – P.121.
- 32 Программа Wolfram Mathematica: <https://www.wolfram.com/mathematica/>
- 33 Абдильдин М.М. Механика теории гравитации Эйнштейна. – Алма-Ата: Наука, 1988. – 200 с.
- 34 Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. – М.: Наука, 1972.
- 35 <http://www.sai.msu.ru/neb/rw/natsat/plaorbw.htm> Орбитальные параметры планет солнечной системы:
- 36 Will C.M. Theory and experiment in gravitational physics. Revised edition. – Cambridge University Press, 1993. – 396 p.
- 37 Will C.M. The Confrontation between General Relativity and Experiment // Living Reviews in Relativity. – 2006. – Vol. 9:3. – 100 p.

References

- 1 N.T. Roseveare, Mercury's Perihelion from Le Verrier to Einstein (Oxford University Press, 1982), 208 p.
- 2 C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler, Gravitation (San Francisco: W. H. Freeman Press, 1973), 1278 p.
- 3 H.C. Ohanian and R. Ruffini Gravitation and Spacetime, 3rd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2013), 528 p.

- 4 L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Teoreticheskaja fizika, tom II. Teorija polja*. 8th ed., (Moscow, Fizmatlit, 2006), 536 s. (in Russ)
- 5 S. Shapiro and S. T'jukolski *Chernye dyry, belye karliki i nejtronnye zvezdy*, (Moscow, Mir, 1985), 300 s. (in Russ).
- 6 J. Lense and H. Thirring, *Phys. Z.* 19, 156 (1918).
- 7 V.A. Fok, *Teorija prostranstva, vremeni i tjagotenija* (Moscow, Nauka, 1961), 569 s. (in Russ)
- 8 R.M. Wald, *General Relativity*, (The University of Chicago Press, 1984), 473 p.
- 9 M.P. Hobson, U G.P. Efstathio and A.N. Lazenby, *General Relativity, An Introduction for Physicists*, (Cambridge University Press, 2006), 592 p.
- 10 L. Ryder *Introduction to General Relativity*, (Cambridge University Press, 2009), 460 p.
- 11 B.F. Schutz, *A First course in General Relativity*, (Cambridge University Press, 2009), 412 p.
- 12 H. Stephani, D. Kramer, M.A H. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003).
- 13 H. Queverdo and B. Mashhoon, *Phys Letters A*, 109 (1, 2), 13-18 (1985).
- 14 H. Queverdo and B. Mashhoon, *Phys Letters A*, 148, 149-153 (1990).
- 15 L.A. Pachon, J.A. Rueda and J.D. Sanabria-Gomez, *Phys.Rev.D*, 73, 104038 (2006).
- 16 V.S. Manko, J.D. Sanabria-Gomez and O.V. Manko, *Phys. Rev. D*, 62, 044048 (2000).
- 17 Boshkayev K., Quevedo H. and Ruffini R. *Gravitational Field of Compact Objects in General Relativity*, *Phys. Rev. D*, 2012, Vol. 86, 064043.
- 18 S. Chandrasekhar, *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*. (Yale University Press, New Haven, CT, 1967).
- 19 R. Meinel, M. Ansorg, A. Kleinwächter, G. Neugebauer and D. Petroff, *Relativistic Figures of Equilibrium*, (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2008).
- 20 J.D. Jackson *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., (New York: John Wiley & Sons, 1999).
- 21 A.N. Tihonov and A.A. Samarskij *Uravnenija matematicheskoy fiziki*, (Moscow: Nauka, 1977), 735 p. (in Russ).
- 22 M. Abramowitz and I.A. Stegun *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover Publications, Inc. New York, NY, USA, 1974).
- 23 E. Poisson and C.M. Will *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, relativistic*, (Cambridge: Cambridge University Press, 2014).
- 24 L.D. Landau and E. M. Lifshitz, *Teoreticheskaja fizika», tom I. Mehanika*, 5th ed., (Moscow: Fizmatlit, 2012), 224 s. (in Russ)
- 25 M.M. Abdil'din, *Problema dvizhenija tel v obshej teorii otositel'nosti*, (Almaty: Qazaq Universiteti, 2006), 132 s. (in Russ)
- 26 K.A. Boshkayev, Zh.A. Kalymova, N.S. Abdualiyeva, Zh.N. Brisheva and A.S. Taukenova, *Rec.Contr.Phys.*, 1 (64), 67-80 (2018). (in Kaz).
- 27 F.P. Pijpers, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 297, L76-L80 (1998).
- 28 S. Godier and J. Rozelot, *Astron. Astrophys.*, 350, 310-317 (1999).
- 29 C.M. Will, *Living Reviews in Relativity* 17, 4 (2014).
- 30 A. Fienga, H. Manche, J. Laskar and M. Gastineau, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 123, 325 (2015).
- 31 R.S. Park, W.M. Folkner and A.S. Konopliv, et al., *Astrophysical Journal*, 153, 121 (2017).
- 32 Wolfram Mathematica: <https://www.wolfram.com/mathematica/>
- 33 M.M. Abdil'din, *Mehanika teorii gravitacii Ejnshtejna*, (Alma-Ata: Nauka, 1988), 200 s. (in Russ)
- 34 V.A. Brumberg *Reljativistskaja nebesnaja mehanika*, (Moscow: Nauka, 1972). (in Russ)
- 35 Orbital parameters of planets of solar system: <http://www.sai.msu.ru/neb/rw/natsat/plaorbw.htm>
- 36 C.M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics*, Revised edition, (Cambridge University Press, 1993), 396 p.
- 37 C.M. Will, *Living Reviews in Relativity* 9, 3 (2006).