ҒТАМР 29.01.11

Бошқаев Қ.А.*, Қалымова Ж.А., Абдуалиева Н.С., Бришева Ж.Н., Таукенова А.С.

ЭТФҒЗИ, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
Қазақстан, Алматы қ., *e-mail: kuantay@mail.ru

АКСИАЛДЫ-СИММЕТРИЯЛЫ ГРАВИТАЦИЯЛЫҚ ӨРІСТІҢ ЭКВАТОРЛЫҚ ЖАЗЫҚТЫҒЫНДА СЫНАҚ ДЕНЕНІҢ ҚОЗҒАЛЫСЫН АДИАБАТТЫҚ ТЕОРИЯ АРҚЫЛЫ ЗЕРТТЕУ

Бұл жұмыста сфералық-симметриялы орталық дененің гравитациялық өрісіндегі сынақ дененің қозғалысы орбитаның векторлық элементтері көмегімен жалпы салыстырмалық теориясында зерттелді. Бұл есеп әдебиетте Шварцшильд есебі деп аталады. Осы есепті шығару үшін Лагранж, Гамильтон формализмдері, орташалау әдісі, ұйытқу теориясы және адиабаттық теориясы қолданылды.

Сонымен бірге, сынақ дененің қозғалысы аксиалды-симметриалы гравитациялық өрісте қарастырылды. Зерттеу нәтижесінде ғаламшарлардың перигелиінің ығысу өрнегі орталық дененің квадрупольдік моментімен толықтырылды. Мұнда квадрупольдік моменттің классикалық түзету мен релятивтік түзетуде үлесі бар екені көрсетілді. Есептеулердің барлығы $\sim 1/c^2$ (мұндағы c – жарық жылдамдығы) және $\sim D$ (квадрупольдік момент) жуықтауларда жүргізілді.

Аксиалды симметриялы метрика үшін ғаламшарлардың перигелийлерінің ығысу өрнегін қорытып шығару барысында екі түрлі әдіс қарастырылды. Бірінші жағдайда қозғалыс теңдеулерін алу үшін Гамилтонның канондық өрнектері тікелей қолданылса, екінші жағдайда адиабаттық инварианттар теориясы жұмылдырылды. Денелер қозғалысының адиабаттық теориясы жалпы салыстырмалық теориясы механикасында эволюциялық қозғалысты зерттеуге арналған әдіс болып табылады. Нәтижесінде, екі түрлі әдіспен алынған өрнектердің бір-біріне сәйкес болғаны және адиабаттық теорияның бірінші әдіске қарағанда тиімді екені анық көрсетілді.

Мақала академик Мейірхан Әбділдиннің туылғанына 80 жыл толуына арналады.

Түйін сөздер: Векторлық элементтер, Шварцшильд метрикасы, квадрупольдік момент, қозғалыс теңдеулері, Лагранж формализмі, Гамильтон формализмі, адиабаттық теория.

Boshkayev K.A.*, Kalymova Zh.A., Abdualiyeva N.S., Brisheva Zh.N., Taukenova A.S.

IETP, Al-Farabi Kazakh National University,
Kazakhstan, Almaty, *e-mail: kuantay@mail.ru

Investigation of a test particle motion in the equatorial plane of the axially symmetric gravitational field in terms of the adiabatic theory

In this paper the motion of a test particle has been investigated in the gravitational field of a spherically symmetric central body employing the vector elements of orbits within general theory of relativity. In the literature this problem is known as the Schwarzschild problem. In order to solve this problem, we have used the Lagrange's formalism, Hamilton's formalism, averaging method, perturbation theory and adiabatic theory.

The motion of the test particle has also been studied in an axially symmetric gravitational field. As a result the expression for the perihelion shift of planets' orbit has been generalized by the quadruple moment of the central body. It was shown that the quadruple moment has contribution to the classical and relativistic corrections. All calculations have been conducted in approximations of $\sim 1/c^2$ (where c is the speed of light) and $\sim D$ (quadruple moment).

In order to calculate the perihelion shift for the axially symmetric metric two different methods were used. In the first case, Hamilton's canonical expressions have been used directly to obtain the equations of motion, and in the second case the theory of adiabatic invariants has been used. The adiabatic theory of bodies motion is a method for study the evolutionary motions in the mechanics of general theory of relativity. As a result the expressions obtained by two different ways coincided with each other and it was clearly shown that the adiabatic theory is more efficient than the first method.

The article is dedicated to the 80th anniversary of academician Meirhan Abdildin's birth.

Key words: Vector elements, Schwarzschild's metric, quadrupole moment, equations of motion, Lagrangian formalism, Hamiltonian formalism, adiabatic theory.

Бошкаев Қ.А.*, Калымова Ж.А., Абдуалиева Н.С., Бришева Ж.Н., Таукенова А.С.

НИИЭТФ, Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
Казахстан, г. Алматы, *e-mail: kuantay@mail.ru

Исследование движения пробной частицы в экваториальной плоскости аксиально-симметричного гравитационного поля с помощью адиабатической теории

В этой работе было исследовано движение пробного тела в гравитационном поле сферически-симметричного центрального тела с помощью векторных элементов орбиты в общей теорий относительности. Эта задача в литературе известна как задача Шварцшильда. Для того, чтобы решить данную задачу были использованы формализм Лагранжа, формализм Гамильтона, метод усреднения, теория возмущения и адиабатическая теория.

Также было рассмотрено движение пробного тела в аксиально-симметричном гравитационном поле. В результате исследований выражение для смещения перигелия планет было дополнено квадрупольным моментом центрального тела. Было показано, что квадрупольный момент имеет вклад в классической и релятивистской поправках. Все расчеты были проведены в приближениях $\sim 1/c^2$ (где, c – скорость света) и $\sim D$ (квадрупольный момент).

При вычислении смещения перигелия планет для аксиально-симметричной метрики были использованы два разных метода. В первом случае для того чтобы получить уравнение движения пробного тела были использованы канонические выражения Гамильтона, а во втором случае – теория адиабатических инвариантов. Адиабатическая теория движения тел является методом изучения эволюционного движения в механике общей теории относительности. В результате было показано что результаты, полученные двумя разными способами совпадают. Вместе с тем было явно продемонстрировано то, что использование адиабатической теории в данном случае является более эффективным способом, чем использование канонических выражений Гамильтона.

Статья посвящается 80-летию со дня рождения академика Меирхана Абдильдина.

Ключевые слова: Векторные элементы, метрика Шварцшильда, квадрупольный момент, уравнения движения, формализм Лагранжа, формализм Гамильтона, адиабатическая теория.

Кіріспе

Қазіргі таңда физика саласы бойынша ғылымның даму деңгейі өте жоғарғы сатыда. Сонымен қатар оның көптеген бөлімдері жан-жақты қарқынды түрде ілгері қадам басып келеді. Олардың ішінде дененің гравитациялық өрісі, уақыт пен кеңістік жайлы заманауи теория – жалпы салыстырмалық теориясының (ЖСТ) эффектерін тексеруде ғарышты зерттеу құрылғыларының дәлдігі күннен-күнге артуда. Бұл мүмкіндіктер релятивтік эффектерді тіпті күн жүйесінде де ескеру қажеттігін көрсетеді [1, 2].

ЖСТ-ның негізін 1916 жылы А. Эйнштейн қалады. Л. Ландаудың айтуы бойынша "Жалпы салыстырмалық теориясы – барлық теориялардың ішіндегі ең әдемі физикалық теория". Бұл теория жетістіктері тек ғарыштық зерттеулерде ғана емес, сонымен қатар күнделікті навигациялық байланыс жүйелерінде де кең қолданысқа ие [2-7].

Жалпы салыстырмалық теориясының бірнеше классикалық эффектері бар. Солардың бірі Меркурий перигелийінің ығысуы. Бұл эффект Шварцшильд, Лензе-Тирринг және Фок метрикалары арқылы есептелгені әдебиеттерден белгілі [8, 9]. Уақыт өте бұл эффектің тек Меркурийге ғана емес, сонымен бірге күн жүйесіндегі өзге ғаламшарларға да тиесілі екені анықталды [1].

Жұмыста Меркурий перигелийінің ығысу эффекті аксиалды-симметриялы гравитациялық өрісте қарастырылды. Ол үшін орталық дененің квадрупольдік моментін ескеру арқылы сынақ дененің қозғалысы зерттелді. Жұмыс теориялық және практикалық сипатқа ие. Қолдану аймағы аспан механикасы және астрономия.

Мақаланың құрылымы келесі түрде ұйымдастырылған: бірінші бөлімде Шварцшильд есебінің шығару жолы векторлық элементтер және орташалау әдісі арқылы қарастырылып, классикалық нәтиже Меркурий перигелиінің ығысу өрнегі алынды; екінші бөлімде орталық дененің квадрупольдік моментін ескергенде сынақ дененің қозғалысы Лагранж-Гамильтон формализмдері көмегімен зерттелді; үшінші бөлімінде адиабаттық теорияны пайдаланып, аксиалды-симметриялы гравитациялық өрісте сынақ дененің қозғалысы зерттелді. Алынған нәтижелер әдебиетте белгілі нәтижелермен салыстырылды. Қорытынды бөлімінде мақаланың негізгі нәтижелері тұжырымдалды және келешекке жоспарланған мәселелер қарастырылды.

Шварцшильд есебі

ЖСТ-да массасы m сынақ дененің массасы m_0 орталық дененің гравитациялық өрісіндегі қозғалысы жайлы есеп Шварцшильд есебі деп аталады [9, 10]. Әдетте, бұл есеп Шварцшильд метрикасы негізінде геодезиялық сызық теңдеулерін интегралдау арқылы немесе Гамильтон-Якоби теңдеулерін шешу арқылы шығарылады. Бұл бөлімде есептеулердің барлығы гармониялық координаттарда жазылған Шварцшильд метрикасы негізінде импульс моменті $\vec{M}$ мен Лаплас $\vec{A}$ векторлары көрінісінде орташалау әдісі арқылы қарастырылады [9].

Әдебиеттерде Шварцшильд метрикасының әр түрлі координаттар жүйесінде келтірілген бірнеше нұсқасы кездеседі. Алайда, астрофизикалық есептерге кеңінен қолданылатыны: стандарт координаттар, изотроптық координаттар және гармониялық координаттар жүйесінде ұсынылған нұсқалары. Физикалық тұрғыдан қарастырғанда бұл нұсқалардың бір-бірінен еш артықшылығы және кемшілігі жоқ. Тек әртүрлі математикалық амалдарды орындау барысында бір нұсқаның екінші нұсқаға қарағанда тиімділігі байқалады [11].

Стандарт координаттар жүйесінде Шварцшильд метрикасы келесі түрде беріледі:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu}{r_s}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr_s^2}{1 - \frac{2\mu}{r_s}} - r_s^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 d\boldsymbol{\phi}^2\right) \tag{1.1}$$

мұндағы, $\mu = \frac{\gamma m_0}{c^2}$, $r = r_s$, γ – гравитациялық тұрақты, m_0 – орталық дененің массасы, r – радиалдық координат, c – жарықтың вакуумдағы жылдамдығы.

Изотроптық координаттар жүйесінде $r = r_i$ метрика мына түрге ие болады:

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{\mu}{2r_i}\right)^2}{\left(1 + \frac{\mu}{2r_i}\right)^2} c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{\mu}{2r_i}\right)^4 \left(dr_i^2 + r_i^2 d\theta^2 + r_i^2 \sin^2 \theta d\boldsymbol{\phi}^2\right). \tag{1.2}$$

Гармониялық координаттар жүйесінде $r = r_h$:

$$ds^2 = \frac{r_h - \mu}{r_h + \mu} c^2 dt^2 - \frac{r_h + \mu}{r_h - \mu} dr_h^2 - \left(r_h + \mu\right)^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\boldsymbol{\phi}^2\right). \tag{1.3}$$

Шварцшильд метрикасының үш нұсқасы өзара радиал координат арқылы мына түрде байланысқан:

$$r = r_s = r_h + \mu = \left(1 + \frac{\mu}{2r_i}\right)^2 r_i. \tag{1.4}$$

Біздің жағдайда Шварцшильд есебін шығару мақсатында метрика гармониялық координаттар жүйесінде $\sim \frac{1}{c^2}$ жуықтауында жазылады:

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\left(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\boldsymbol{\phi}^2\right) \tag{1.5}$$

мұндағы (ct, r, θ, φ) – уақыттық және кеңістіктік координаттар, U – сфералық-симметриялы орталық дененің сыртқы Ньютондық гравитациялық потенциалы:

$$U = U(r) = \frac{\gamma m_0}{r}. \tag{1.6}$$

Есепті шығару үшін [3, 5, 6, 8] әдебиетте ұсынылған әдісті пайдаланамыз. Ол әдіс орбитаның векторлық элементтерін қолдануға негізделген:

$$\overrightarrow{M} = \left[\vec{r}, \vec{p}\right], \tag{1.7}$$

$$\vec{A} = \left[\frac{\vec{p}}{m}, \vec{M}\right] - \frac{\gamma m m_0}{r}\vec{r} \tag{1.8}$$

мұндағы, $\vec{M}$ – сынақ дененің орбиталдық импульс моменті, $r = |\vec{r}|$ – радиус вектордың модулі, $\vec{p}$ – сынақ дененің импульсі, $\vec{A}$ – Лаплас векторы, $\vec{M}$-ң бағыты орбита жазықтығына перпендикуляр, ал $\vec{A}$ перигелийге қарай бағытталған. Шварцшильд есебінде $\vec{i}$ векторын Лаплас векторымен бағыттас, $\vec{k}$ векторын $\vec{M}$ векторымен бағыттас етіп алған ыңғайлы. Лаплас векторының модулі $A = \gamma m m_0 e$ өрнегі арқылы анықталады, мұндағы e – орбитаның эксцентриситеті. Векторлық элементтердің уақыт бойынша өзгерісі:

$$\dot{\vec{M}} = \left[\dot{\vec{r}}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \dot{\vec{p}}\right], \tag{1.9}$$

$$\dot{\vec{A}} = \left[\frac{\dot{\vec{p}}}{m}, \vec{M}\right] + \left[\frac{\vec{p}}{m}, \dot{\vec{M}}\right] - \gamma m m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right). \tag{1.10}$$

$\dot{\vec{r}}$ және $\dot{\vec{p}}$ туындаларын Гамильтонның канондық теңдеулері арқылы есептейміз [9]:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{dH}{dp}\frac{\vec{p}}{p},$$
$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = -\frac{dH}{dr}\frac{\vec{r}}{r}. \tag{1.11}$$

Ал Гамильтон функциясын табу үшін ds-ті $\sim \frac{1}{c^2}$ жуықтауында есептеп, келесі амалдарды орындау керек:

$$ds^2 =$$
$$= c^2 dt^2 \left\{\left[1 - \frac{2U}{c^2} + \frac{2U^2}{c^4}\right] - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\frac{(d\vec{r})^2}{c^2 dt^2}\right\} =, \tag{1.12}$$
$$+\left|\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = (\vec{v})^2 = v^2\right|$$

$$ds = cdt\sqrt{1 - \frac{2U}{c^2} + \frac{2U^2}{c^4} - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\frac{v^2}{c^2}} \tag{1.13}$$

метрика $\sim \frac{1}{c^2}$ жуықтауында берілгендіктен (1.13) өрнегін Тейлор қатарына жіктейміз, ол үшін төменде көрсетілген формуланы қолданамыз:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots. \tag{1.14}$$

ds өрнегі келесі түрде жазылады:

$$ds =$$
$$= cdt\left\{1 - \frac{U}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} + \frac{U^2}{2c^4} - \frac{3Uv^2}{2c^4} - \frac{v^4}{8c^4}\right\}. \tag{1.15}$$

Сынақ дененің Лагранж функциясы метрика арқылы төмендегідей өрнектеледі [4]:

$$L = -mc\frac{ds}{dt} = -mc^2 + mU +$$
$$+\frac{mv^2}{2} - \frac{mU^2}{2c^2} + \frac{3mUv^2}{2c^2} + \frac{mv^4}{8c^2}. \tag{1.16}$$

Жалпылама импульсті Лагранж функциясынан есептеп аламыз,ол мында түрде болады:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{dL}{dv}\frac{\vec{v}}{v} = \left(1 + \frac{3U}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2}\right)m\vec{v} \tag{1.17}$$

Осыдан жалпылама жылдамдық:

$$\vec{v} = \left(1 - \frac{3U}{c^2} - \frac{p^2}{2m^2c^2}\right)\frac{\vec{p}}{m}. \qquad (1.18)$$

Гамильтон функциясын табу үшін белгілі өрнекті пайдаланамыз:

$$H = \left(\vec{p}\cdot\vec{v}\right) - L \qquad (1.19)$$

(1.16) мен (1.18) өрнектерін (1.19) теңдеуіне қойып:

$$H = mc^2 - mU + \frac{p^2}{2m} - \frac{3Up^2}{2mc^2} + \frac{mU^2}{2c^2} - \frac{p^4}{8m^3c^2} \qquad (1.20)$$

Шварцшильд есебі үшін Гамильтон функциясын аламыз.

Гамильтонның канондық теңдеулері арқылы $\dot{\vec{r}}$ және $\dot{\vec{p}}$ есептейміз:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \left(1 - \frac{3U}{c^2} - \frac{p^2}{2m^2c^2}\right)\frac{\vec{p}}{m}, \qquad (1.21)$$

$$\dot{\vec{p}} = \left(1 - \frac{U}{c^2} + \frac{3p^2}{2m^2c^2}\right)m\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \qquad (1.22)$$

мұндағы,

$$\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}} = \frac{dU(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\gamma m_0}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \qquad (1.23)$$

Егер (1.21) және (1.22) ескерсек, векторлық элементтердің уақыт бойынша өзгерісі:

$$\dot{\vec{M}} = \left[\dot{\vec{r}}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \dot{\vec{p}}\right] = 0 \qquad (1.24)$$

мұнда $\dot{\vec{M}} = 0$ болуы орбиталық моменттің сақталатынын және қозғалыстың жазық екенін көрсетеді, ал $\dot{\vec{A}}$ есептеу үшін келесі түрлендірулерді жасаймыз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \vec{r}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (1.25)$$

мұндағы,

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dt}\sqrt{(\vec{r}\cdot\vec{r})} = -\frac{1}{2r^2}(\vec{r}\cdot\vec{r})^{-\frac{1}{2}}2\left(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}\right) = -\frac{\left(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}\right)}{r^3}$$

нәтижесінде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})}{r^3} \qquad (1.26)$$

(1.21) – ді (1.26) – ға қойып келесі өрнекті аламыз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = -\left(1 - \frac{3U}{c^2} - \frac{p^2}{2m^2c^2}\right)\frac{\left[\vec{r}, \vec{M}\right]}{mr^3} \qquad (1.27)$$

(1.22), (1.24) және (1.27) ескерсек, (1.10) өрнектегі $\vec{A}$ векторының уақыт бойынша өзгерісі шығады:

$$\dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{2\gamma m_0}{c^2}\left(U + \frac{p^2}{m^2}\right)\frac{\left[\vec{r}, \vec{M}\right]}{r^3}. \qquad (1.28)$$

Осы өрнекті сынақ дененің классикалық (релятивтік емес) толық энергиясы арқылы жазсақ:

$$\dot{\vec{A}} = -\frac{2\gamma m_0}{c^2}\left(\frac{2E}{m} + 3U\right)\frac{\left[\vec{r}, \vec{M}\right]}{r^3} \qquad (1.29)$$

мұндағы,

$$E = \frac{p^2}{2m} - mU \qquad (1.30)$$

E – сынақ дененің толық энергиясы [8].

(1.28) және (1.29) теңдеулері векторлық элементтер арқылы жазылғандықтан қарапайым, әрі көрнекті. Осыдан Кеплерлік эллипстің перигелийі уақыт бойынша өзгеретінін байқауға болады. Мұнда $1/c^2$ көбейткіштің әсерінен $\dot{\vec{A}}$ өте баяу өзгеретін шама. Осы шаманың үлкен (ғасырлық) уақыт аралығында өзгерісін зерттеу үшін сынақ дененің айналу периоды *T* бойынша орташалаймыз. Ол үшін кез келген физикалық шаманың орташа мәнін табу анықтамасын қолданамыз:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt\,. \qquad (1.31)$$

Мұнда ескеретін жайт, (1.29)-ды орташалау барысында классикалық толық энергияның сақталатын тұрақты шама екенін ұмытпау керек. Сонымен, келесі шаманы орташалаймыз:

$$\overline{\frac{\vec{r}}{r^3}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\vec{r}}{r^3}dt = ? \qquad (1.32)$$

ол үшін релятивтік емес қозғалыс моментінің сақталу заңын пайдаланамыз [8]:

$$M = mr^2\dot{\varphi} \qquad (1.33)$$

осы жерден уақытты бұрыш арқылы өрнектеп аламыз:

$$dt = \frac{mr^2}{M}d\varphi\,. \qquad (1.34)$$

Осылайша, уақыт бойынша интегралды бұрыш бойынша интегралға алмастырып жазамыз

$$\overline{\frac{\vec{r}}{r^3}} = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_r}{r^2}\frac{mr^2}{M}d\varphi = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi}\vec{e}_r d\varphi \qquad (1.35)$$

мұндағы,

$$\vec{r} = r\vec{e}_r\,, \quad r = \frac{P}{1+e\cos\varphi}\,, \quad 0 < \varphi < 2\pi \qquad (1.36)$$

P – кеплерлік орбитаның параметрі, қозғалыс жазық болғандықтан біз тек xy жазықтығын қарастырамыз, яғни $\vec{r}$ -дың тек қана екі құраушысы болады, φ – полярлық бұрыш, ал бірлік вектор $\vec{e}_r$ төмендегідей жазылады:

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{i}x + \vec{j}y}{r} = \frac{\vec{i}r\cos\phi + \vec{j}r\sin\phi}{r} = \vec{i}\cos\phi + \vec{j}\sin\phi \qquad (1.37)$$

онда төмендегі интеграл нөлге тең болады

$$\int_0^{2\pi}\left(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi\right)d\varphi = 0\,. \qquad (1.38)$$

Сәйкесінше,

$$\overline{\frac{\vec{r}}{r^3}} = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_r}{r^2}\frac{mr^2}{M}d\varphi = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi}\vec{e}_r d\varphi = 0\,, \qquad (1.39)$$

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\vec{r}}{r^4}} &= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\vec{r}}{r^4}dt = \\ &= \frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\frac{\vec{r}}{r^4}\frac{mr^2}{M}d\phi = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi}\frac{\vec{e}_r}{r}d\phi = \frac{\pi me}{TMP}\vec{i}\end{aligned}\,. \qquad (1.40)$$

Жоғарыдағы өрнектерді есептеу барысында (1.31) төмендегідей түрленеді:

$$\begin{aligned}\langle f \rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \\ &= \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} f(\phi)\frac{dt}{d\phi}d\phi = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi} f(\phi)\,r^2 d\phi\end{aligned}\,. \qquad (1.41)$$

Егер (1.29) орташалау қажет болса, онда кеплерлік эллипс үшін импульсті жылдамдық арқылы өрнектеп алып орташа мәнді есептейміз. Бұл жағдайда кеплерлік жылдамдық (1.33) және (1.36) өрнектері арқылы анықталады:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{M}{mP}\left\{-\sin\phi\vec{i} + \left(e+\cos\phi\right)\vec{j}\right\}, \qquad (1.42)$$

Бұл өрнек бізге төмендегі интегралды есептеуге мүмкіндік береді:

$$\begin{aligned}\overline{\frac{p^2\vec{r}}{m^2r^3}} &= \overline{\frac{v^2\vec{r}}{r^3}} = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi}\frac{v^2\vec{r}}{r^3}r^2 d\phi = \\ &= \frac{2\pi eM}{mTP^2}\vec{i} = \frac{2\pi\gamma mm_0 e}{TMP}\vec{i}\end{aligned} \qquad (1.43)$$

Мұнда орбитаның параметрі мен моменттің арасындағы мынандай классикалық қатынас қолданылды:

$$\frac{M^2}{P} = \gamma m^2 m_0\,. \qquad (1.44)$$

Нәтижесінде (1.28) және (1.29) келесі түрде жазылады:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{6\pi\gamma m_0}{TPc^2}\left[\vec{e}_M, \vec{A}\right] \qquad (1.45)$$

мұндағы,

$$\vec{e}_M = \frac{\vec{M}}{M} = \vec{k},$$

$$\vec{A} = A\vec{e}_A = \gamma m m_0 e\vec{i}, \qquad (1.46)$$

$$\vec{e}_A = \vec{i}.$$

Бұл жердегі $\vec{A}$ векторы шамасы бойынша емес, бағыты бойынша өзгереді және (1.45) формулаға сәйкес $\vec{M}$ -ді ху орбита жазықтығында $\vec{\Omega}$ бұрыштық жылдамдықпен айналады:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}, \vec{A}\right],\ \vec{\Omega} = \frac{6\pi\gamma m_0}{TPc^2}\vec{e}_M. \qquad (1.47)$$

Егер $\vec{A}$ векторының орнын орбита жазықтығында A және g полярлық координаттар арқылы сипаттайтын болсақ, онда (1.47)-тен келесі өрнекті аламыз

$$\frac{dg}{dt} = \left(\vec{\Omega}\cdot\vec{e}_M\right) = \frac{6\pi\gamma m_0}{TPc^2}, \qquad (1.48)$$

мұндағы, $P = a(1-e^2)$ – орбитаның параметрі, a – эллипстің үлкен жарты өсі. g полярлық бұрыштың T период бойынша өзгерісі келесі өрнекке тең болады:

$$\Delta g = \Omega T = \frac{6\pi\gamma m_0}{a(1-e^2)c^2}. \qquad (1.49)$$

Бұл ғаламшардың перигелий ығысуы үшін белгілі формула [2, 8, 9, 11]. Сәйкесінше Шварцшильд есебінде перигелий ығысу туралы мәселе дұрыс түсіндіріледі.

Статикалық деформацияланған дененің метрикасы

Аксиалды-симметриялы гравитациялық өрісте сынақ дененің қозғалысын зерттеу мақсатында статикалық деформацияланған орталық дененің метрикасын пайдаланамыз. Біздің жағдайда оның жалпы түрі:

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2}\right)dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)d\vec{r}^2. \qquad (2.1)$$

Шварцшильд метрикасына ұқсағанымен, мұндағы деформацияланған орталық дененің Ньютондық потенциалы келесі түрде беріледі:

$$U = U(r,\theta) = \frac{\gamma m_0}{r} + \frac{\gamma D}{2r^3}P_2(\cos\theta). \qquad (2.2)$$

Сол себепті жоғарыдағы метрика енді аксиалды-симметриялы дененің метрикасы деп аталады. Мұндағы $P_2(\cos\theta)$ Лежандр полиномы және ол төмендегідей анықталған:

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3z^2}{r^2} - 1\right),$$

$$z = r\cos\theta \qquad (2.3)$$

D – орталық дененің квадрупольдік моменті, Ландаудың анықтамасы бойынша полюстерінде сығылыңқы дене үшін $D < 0$, ал полюстерінде созылыңқы денелер үшін $D > 0$, $0 \le \theta \le \pi$ – z -пен r -дің арасындағы полярлық бұрыш [2]. Есепті жеңілдету мақсатында және квадрупольдік моменттің сынақ дененің қозғалысына әсерін зерттеу барысында біз тек экваторлық жазықтықты таңдап аламыз.

Осыған байланысты, Ньютондық потенциалды келесі түрде жазып алған ыңғайлы:

$$U(r) = \frac{\gamma m_0}{r} + \frac{\tilde{D}}{r^3},$$

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial\vec{r}} = -\frac{\gamma m_0}{r^3}\vec{r} - \frac{3\tilde{D}}{r^5}\vec{r},$$

$$\tilde{D} = \frac{\chi\gamma}{2}D. \qquad (2.4)$$

Ньютондық потенциал квадрупольдік моменттің бірінші дәрежесіне пропорционал болғандықтан, есептеулерді осы жуықтауда жүргізген абзал

$$U(r) = U_0(r) + \delta U(r), \qquad U_0 = \frac{\gamma m_0}{r},$$

$$\delta U = \frac{\widetilde{D}}{r^3}, \qquad U^2 \approx U_0^2 + 2U_0\delta U \quad (2.5)$$

мұнда, U_0 – Ньютондық потенциалдың сфералық-симметриялы бөлігі, δU – орталық дененің деформациясын сипаттайтын потенциалдың ұйытқыған бөлігі. Есептеулердің барлығы экваторлық жазықтықта $\theta = \pi/2$, $\chi = P_2(\cos\theta) = -1/2$ жүргізілді.

Біз таңдап алған метрика аксиалды-симметриялы өрісті сиппаттайтын жалғыз ғана метрика емес. Әдебиетте осыған ұқсас метрикалардың бірнеше түрі бар [14]. Алайда бұл метриканы біз Фок метрикасы негізінде қорытып шығарғандықтан, оны статикалық аксиалды-симметриялы дене үшін Фок метрикасы деп атаймыз [15]. Бұл метрика координаттық түрлендірулер арқылы әдебиетте белгілі аксиалды-симметриялы метрикалардың дербес шектік жағдайы болып табылады және олардың арасындағы байланыс болатыны анық көрсетілген [15]. Мұндағы біздің мақсатымыз орталық дененің деформациясы, яғни сфералық симметриядан ауытқуы сынақ дененің қозғалысына қалай әсер ететінін көрсету. Сонымен бірге, Меркурий перигелиінің ығысу (айналу) формуласын квадрупольдік моментпен жалпылау (толықтыру).

Аксиалды-симметриялы метрика тек қана статикалық емес, сонымен қатар, стационар да болады, яғни орталық дененің айналуы сынақ дененің қозғалысына әсер етеді, сыртқы гравитациялық өрісті өзгертеді. Мұндай метрикаларға қатысты әдебиетте мәлімет өте көп және олардың қасиеттерін кейбір жағдайда тек сандық әдістермен зерттеуге болады [15-25].

Біздің мақсатымызға статикалық аксиалды-симметриялы дене үшін табылған Фок метрикасы жеткілікті. Сондықтан осы жағдайда Лагранжиан мен Гамильтонианның жалпы түрі бірінші бөлімдегідей өзгеріссіз қалады. Сәйкесінше, қозғалыс теңдеулерінің де жалпы түрі де сол күйінде жазылады.

$$\dot{\vec{r}} = \left(1 - \frac{3U}{c^2} - \frac{p^2}{2m^2c^2}\right)\frac{\vec{p}}{m}, \qquad (2.6)$$

$$\dot{\vec{p}} = \left(1 - \frac{U}{c^2} + \frac{3p^2}{2m^2c^2}\right) m \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}. \qquad (2.7)$$

Векторлық элементтердің уақыт бойынша өзгерісі:

$$\dot{\vec{M}} = \left[\dot{\vec{r}}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \dot{\vec{p}}\right] = 0. \qquad (2.8)$$

$$\dot{\vec{A}} = \left[\frac{\dot{\vec{p}}}{m}, \vec{M}\right] - \gamma m m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \qquad (2.9)$$

Енді (2.9) өрнегі бойынша төмендегідей сәйкес шамалардың мәнін табамыз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = -\frac{1}{mr^2}\left(1 - \frac{3U}{c^2} - \frac{p^2}{2m^2c^2}\right)\left[\vec{e}_r, \vec{M}\right] \quad (2.10)$$

$$\left[\frac{\dot{\vec{p}}}{m}, \vec{M}\right] = \left(1 - \frac{U}{c^2} + \frac{3p^2}{2m^2c^2}\right)\frac{dU}{dr}\left[\vec{e}_r, \vec{M}\right] \quad (2.11)$$

(2.9) формуласы біздің жуықтауға сәйкес төмендегідей жазылады:

$$\dot{\vec{A}} = \dot{\vec{A}}_0 + \delta\dot{\vec{A}} \qquad (2.12)$$

мұндағы $\dot{\vec{A}}_0$ – Лаплас векторының уақыт бойынша туындысының Шварцшильд бөлігі, $\Delta\dot{\vec{A}}$ – ұйытқудан пайда болған бөлік, (2.9) өрнегі ақырында былайша түрленеді:

$$\dot{\vec{A}} = \left\{\left(1 - \frac{U}{c^2} + \frac{3p^2}{2m^2c^2}\right)\frac{dU}{dr} + \frac{\gamma m_0}{r^2}\left(1 - \frac{3U}{c^2} - \frac{p^2}{2m^2c^2}\right)\right\}\left[\vec{e}_r, \vec{M}\right], \qquad (2.13)$$

$$\dot{\vec{A}}_0 = \left\{\left(1 - \frac{U_0}{c^2} + \frac{3p^2}{2m^2c^2}\right)\frac{dU_0}{dr} + \frac{\gamma m_0}{r^2}\left(1 - \frac{3U_0}{c^2} - \frac{p^2}{2m^2c^2}\right)\right\}\left[\vec{e}_r, \vec{M}\right], \qquad (2.14)$$

$$\delta\dot{\vec{A}} = \left\{ -\frac{\Delta U}{c^2}\frac{dU_0}{dr} + \left(1 - \frac{U_0}{c^2} + \frac{3p^2}{2m^2c^2}\right)\frac{d\Delta U}{dr} + \frac{\gamma m_0}{r^2}\left(-\frac{3\Delta U}{c^2}\right)\right\}\left[\vec{e}_r, \vec{M}\right] \quad (2.15)$$

мұндағы,

$$\frac{dU_0}{dr} = -\frac{\gamma m_0}{r^2} = -\frac{U_0}{r},$$

$$\frac{d\delta U}{dr} = -\frac{3\tilde{D}}{r^4} = -\frac{3\delta U}{r} \quad (2.16)$$

нәтижесінде келесі өрнектерге қол жеткіземіз:

$$\dot{\vec{A}}_0 = -\frac{2\gamma m_0}{c^2}\left(U_0 + \frac{p^2}{m^2}\right)\frac{\left[\vec{e}_r, \vec{M}\right]}{r^2}, \quad (2.17)$$

$$\delta\dot{\vec{A}} = -\left(1 - \frac{U_0}{3c^2} + \frac{3p^2}{2m^2c^2}\right)\frac{3\tilde{D}}{r^4}\left[\vec{e}_r, \vec{M}\right] \quad (2.18)$$

(2.17) бірінші бөлімде алынған өрнекке тең. Сондықтан, тек ұйытқыған бөлікті қарастырамыз. Классикалық жағдайда [9]

$$E = \frac{p^2}{2m} - mU_0 = -\frac{\gamma m m_0}{2a} \quad (2.19)$$

сынақ дененің толық энергиясының сақталу заңын қолдансақ:

$$\delta\dot{\vec{A}} = -\left(1 + \frac{1}{c^2}\left\{\frac{3E}{m} + \frac{8U_0}{3}\right\}\right)\frac{3\tilde{D}}{r^4}\left[\vec{e}_r, \vec{M}\right] \quad (2.20)$$

жоғарыдағы өрнекті бірінші бөлімде қолданылған әдістер арқылы орташалаймыз және төмендегі мәндерді аламыз:

$$\overline{\frac{\vec{r}}{r^5}} = \frac{2\pi m e}{TMP^2}\vec{i}, \quad (2.21)$$

$$\overline{\frac{\vec{r}}{r^6}} = \frac{3\pi m e\left(4 + e^2\right)}{4TMP^3}\vec{i}, \quad (2.22)$$

$$\overline{\frac{v^2\vec{r}}{r^5}} = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi}\frac{v^2\vec{r}}{r^5}r^2 d\phi = = \frac{M\pi e\left(8 + 7e^2\right)}{2mTP^4}\vec{i} = \frac{\pi\gamma m m_0 e\left(8 + 7e^2\right)}{2TMP^3}\vec{i}. \quad (2.23)$$

Есептелген орташа мәндерді (2.18) немесе (2.20)-ға апарып қойсақ,

$$\delta\dot{\vec{A}} = 3\tilde{D}\left[\vec{M}, \vec{i}\right]\left\{\frac{2\pi m e}{TMP^2} - \frac{\pi\gamma m m_0 e\left(4 + e^2\right)}{4TMP^3c^2} + \frac{3\pi\gamma m m_0 e\left(8 + 7e^2\right)}{4TMP^3c^2}\right\} \quad (2.24)$$

Әрмен қарай

$$\vec{A} = \gamma m m_0 e\vec{i} \quad (2.25)$$

өрнекті ескере отырып ықшамдасақ,

$$\delta\dot{\vec{A}} = \frac{6\pi\tilde{D}\left[\vec{M}, \vec{A}\right]}{\gamma m_0 TMP^2}\left\{1 + \frac{5\gamma m_0}{2Pc^2}\left(1 + e^2\right)\right\} \quad (2.26)$$

және

$$\dot{\vec{A}} = \dot{\vec{A}}_0 + \delta\dot{\vec{A}} = \left[\vec{\Omega}, \vec{A}\right] = \left[(\vec{\Omega}_0 + \delta\vec{\Omega}), \vec{A}\right] \quad (2.27)$$

мұндағы, $\vec{\Omega}_0$ – Шварцшильд бөлігі жоғарыда бірінші бөлімде қарастырғанмен бірдей болады. Ал $\delta\vec{\Omega}$ ұйытқыған бөлік. Оның өзі классикалық және релятивтік құраушылардан тұрады:

$$\delta\vec{\Omega} = \delta\vec{\Omega}_{клас} + \delta\vec{\Omega}_{рел}, \quad (2.28)$$

$$\delta\vec{\Omega}_{клас} = \frac{6\pi\tilde{D}}{\gamma m_0 TP^2}\vec{e}_M, \quad (2.29)$$

$$\delta\vec{\Omega}_{рел} = \frac{15\pi\tilde{D}}{TP^3c^2}\left(1 + e^2\right)\vec{e}_M. \quad (2.30)$$

Классикалық бөлік әдебиетте белгілі нәтижемен бірдей болып шықты [12]. Ал релятивтік құраушының дұрыс-бұрыстығын тексеру үшін осы есепті келесі бөлімде адиабаттық теория арқылы шығарамыз.

Адиабаттық теория

Денелер қозғалысының адиабаттық теориясы жалпы салыстырмалық теориясы механикасында эволюциялық қозғалысты зерттеуге арналған әдіс болып табылады. Оның негізін салған академик М.М. Абдильдин [8, 9, 11]. Бұл әдіс қозғалысты зерттеу үшін векторлық элементтерді қолдануға, бейсызық тербелістер теориясының асимптотикалық әдістеріне және адиабаттық инварианттар әдісіне негізделген.

Қозғалысты векторлық элементтер арқылы бейнелеуге болады. Олардың векторлық сипатына қарай қозғалыс теңдеуінің жалпы түрін жазуға болады:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{dM}{dt}\vec{e}_M + \left[\vec{\Omega}, \vec{M}\right], \tag{3.1}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA}{dt}\vec{e}_A + \left[\vec{\Omega}, \vec{A}\right]. \tag{3.2}$$

Мұнда қозғалыс теңдеуінің жалпы жазуында сынақ денесінің $\vec{\Omega}$ бұрыштық жылдамдығы белгісіз болып қалады. Оның нақты түрі қарастырылып отырған физикалық жүйеге байланысты. Расында, [9] жұмыста келесі қатынас орындалатыны көрсетілген:

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \vec{M}}, \tag{3.3}$$

мұндағы $\overline{H}$ – кеплерлік қозғалыс бойынша орташаланған гамильтонианның мәні. Сонымен бірге $\overline{H}$ импульс моменттің $\vec{M}$ және жүйенің адибаттық инварианты деп аталатын

$$M_0 = \frac{M}{\sqrt{1-\frac{A^2}{\alpha^2}}}, \quad \alpha = \gamma m m_0 \tag{3.4}$$

шаманың фунциясы болып табылады.

Бұрыштық жылдамдықты білу белгілі релятивтік эффектерді есептеуге мүмкіндік береді. Бұл жағдайда қозғалыс теңдеулерін шешудің қажеті болмайды. (3.4) инварианттың болуы (3.1) мен (3.2) қозғалыс теңдеулерін келесі түрде жазуға мүмкіндік береді:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{dM}{dt}\vec{e}_M + \left[\vec{\Omega}, \vec{M}\right], \tag{3.5}$$

$$\frac{d\vec{e}_A}{dt} = \left[\vec{\Omega}, \vec{e}_A\right] \tag{3.6}$$

(3.5) пен (3.6) теңдеулері және (3.4) қатынасының болуы ЖСТ механикасындағы есептерді зерттеу әдістерінің математикалық негізі болып табылады және денелер қозғалысының адиабаттық теориясы деп аталады. Басқаша айтқанда, (3.4) қатынас квазикеплерлік есептегі эволюциялық қозғалыс мәселесін толығымен шешеді.

Аксиалды-симметриялық метрика үшін гамильтониан келесі түрде жазылады:

$$\begin{gathered} H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - mU - \\ -\frac{1}{c^2}\left(\frac{p^4}{8m^3} + \frac{3Up^2}{2m} - \frac{mU^2}{2}\right) \end{gathered} \tag{3.7}$$

және оның Шварцшильд бөлігі мен ұйытқыған бөлігін қарастырамыз:

$$H = H_0 + \delta H. \tag{3.8}$$

Шварцшильд бөлігі:

$$\begin{gathered} H_0 = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - mU_0 - \\ -\frac{1}{c^2}\left(\frac{p^4}{8m^3} + \frac{3U_0 p^2}{2m} - \frac{mU_0^2}{2}\right) \end{gathered}. \tag{3.9}$$

Ал ұйытқыған бөлігі:

$$\delta H = -m\delta U - \frac{1}{c^2}\left(\frac{3\delta U p^2}{2m} - mU_0 \delta U\right). \tag{3.10}$$

Гамильтонианның Шварцшильд бөлігінің орташа мәнін анықтаймыз, ол үшін алдын ала релятивтік бөлігінде импульсті жылдамдық арқылы өрнектеп аламыз:

$$\begin{aligned}\bar{H}_0 &= mc^2 + \overline{\frac{p^2}{2m} - mU_0} - \\ &-\frac{1}{c^2}\left(\frac{m}{8}\overline{v^4} + \frac{3m}{2}\overline{U_0 v^2} - \frac{m}{2}\overline{U_0^{\,2}}\right)\end{aligned} . \quad (3.11)$$

Төмендегі Кеплер қозғалысының формулаларын ескере отырып:

$$P = \frac{M^2}{m\alpha}, \qquad T = \frac{2\pi M_0^3}{m\alpha^2}, \qquad e^2 = 1 - \left(\frac{M}{M_0}\right)^2,$$

$$A = \gamma m m_0 e, \quad a = \frac{M_0^2}{m\alpha} \quad (3.12)$$

орташалау өрнегін (1.29) пайдаланамыз.

Гамильтонианның классикалық бөлігі орташа қозғалыс анықтамасы арқылы өрнектеледі:

$$\overline{\frac{p^2}{2m} - mU_0} = E = -\frac{\gamma m m_0}{2a} = -\frac{m\alpha^2}{2M_0^2} . \quad (3.13)$$

Ал релятивтік бөлігі:

$$\begin{aligned}\frac{m}{8}\overline{v^4} &= \frac{\pi M^3}{4m^2 T P^2}\left(4 - 3\sqrt{1-e^2}\right) = \\ &= \frac{m\alpha^4}{2MM_0^3} - \frac{3m\alpha^4}{8M_0^4}\end{aligned} , \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}&\frac{3m}{2}\overline{U_0 v^2} = \frac{3\alpha}{2}\overline{\frac{v^2}{r}} = \\ &= \frac{3\pi\alpha M}{mTP}\left(2 - \sqrt{1-e^2}\right) = \frac{3m\alpha^4}{MM_0^3} - \frac{3m\alpha^4}{2M_0^4}\end{aligned} , \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}-\frac{m}{2}\overline{U_0^{\,2}} &= -\frac{\alpha^2}{2m}\overline{\frac{1}{r^2}} = \\ &= -\frac{\pi\alpha^2}{TM} = -\frac{m\alpha^4}{2MM_0^3}\end{aligned} . \quad (3.16)$$

Мұнда ескеретін жайт барлық орташаланған шамалар орбиталдық момент және адиабаттық инвариант арқылы жазылу керек. Енді (3.11)-ге сәйкесінше (3.14), (3.15) және (3.16) формулалар қойылады:

$$\begin{aligned}\bar{H}_0 &= mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2} - \\ &-\frac{1}{c^2}\left(\frac{3m\alpha^4}{MM_0^3} - \frac{15}{8}\frac{m\alpha^4}{M_0^4}\right)\end{aligned} . \quad (3.17)$$

Бұл өрнек Шварцшильд есебіндегі гамильтонианның орташаланған мәні болып табылады. Осыған сәйкес жалпы бұрыштық жылдамдықтың екі құраушысы болады:

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_0 + \delta\vec{\Omega} \quad (3.18)$$

мұндағы,

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \vec{M}}, \quad \vec{\Omega}_0 = \frac{\partial \bar{H}_0}{\partial \vec{M}}, \quad \delta\vec{\Omega} = \frac{\partial \delta\bar{H}}{\partial \vec{M}} . \quad (3.19)$$

Сфералық-симметриялық жағдай үшін бұрыштық жылдамдық:

$$\vec{\Omega}_0 = \frac{\partial \bar{H}_0}{\partial \vec{M}} = \frac{3m\alpha^4}{M^3 M_0^3 c^2}\vec{M} = \frac{6\pi\gamma m_0}{TPc^2}\vec{e}_M \quad (3.20)$$

және T периодындағы перигелийдің ығысу өрнегі:

$$\Delta g = \Omega_0 T = \frac{6\pi\gamma m_0}{a\left(1-e^2\right)c^2} . \quad (3.21)$$

Біз қайтадан Эйнштейннің белгілі формуласын алдық. Мұнда біз тек гамильтонианның орташа мәнінен $\bar{H}$ векторлық элемент $\vec{M}$ бойынша туынды алдық. Шварцшильд есебінде перигелийдің ығысу эффекті гамильтонианда орбиталдық моментке $\vec{M}$ тәуелділіктің бар болуына байланысты екені байқалады. Классикалық механикада, яғни Кеплер есебінде, мұндай тәуелділік жоқ және перигелий қозғалмайды. Кеплер есебінде гамильтониан тек жүйінің инвариантына M_0 тәуелді болады және оның туындысы:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial M_0} = \frac{m\alpha^2}{M_0^3} = \frac{2\pi}{T} . \quad (3.22)$$

орташа қозғалысты көрсетеді.

Ұйытқыған бөлік үшін гамильтонианның орташа мәні төменгідей жазылады:

$$\overline{\delta H} = -m\overline{\delta U} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{3}{2}m\overline{\delta U v^2} - m\overline{U_0 \delta U}\right) \quad (3.23)$$

Ал орташаланған шамалар:

$$-m\overline{\delta U} = -m\tilde{D}\overline{\frac{1}{r^3}} = -\frac{m^4\alpha^3}{M^3M_0^3}\tilde{D}, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2}m\overline{\delta U v^2} = \frac{3}{2}m\tilde{D}\overline{\frac{v^2}{r^3}} = \\ &= \frac{9m^4\alpha^5}{2M^5M_0^3}\tilde{D} - \frac{3m^4\alpha^5}{M^3M_0^5}\tilde{D} \end{aligned}, \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} &-m\overline{U_0\delta U} = -\alpha\tilde{D}\overline{\frac{1}{r^4}} = \\ &= \frac{m^4\alpha^5}{2M^3M_0^5}\tilde{D} - \frac{3m^4\alpha^5}{2M^5M_0^3}\tilde{D} \end{aligned}. \quad (3.26)$$

(3.23) формуласына сәйкесінше (3.24), (3.25) және (3.26) формуласының мәндерін қоямыз. Ұйытқыған гамильтониан:

$$\begin{aligned} &\overline{\delta H} = -\frac{m^4\alpha^3\tilde{D}}{M^3M_0^3} - \\ &-\frac{m^4\alpha^5\tilde{D}}{M_0^3c^2}\left(\frac{3}{M^5} - \frac{5}{2M^3M_0^2}\right) \end{aligned}. \quad (3.27)$$

Осыдан ұйытқыған бұрыштық жылдамдық:

$$\begin{aligned} &\delta\vec{\Omega} = \frac{\partial\delta\bar{H}}{\partial\vec{M}} = \frac{3m^4\alpha^3\tilde{D}}{M^4M_0^3}\vec{e}_M - \\ &-\frac{15m^4\alpha^5\tilde{D}}{2M^6M_0^3c^2}\left(\frac{M^2}{M_0^2} - 2\right)\vec{e}_M \end{aligned}. \quad (3.28)$$

Бұл жерде ұйытқыған бұрыштық жылдамдықтың классикалық және релятивтік құраушылары бар екенін тағы да байқауға болады. Жоғарыдағы (3.12) формуланы қолдансақ, бұрыштық жылдамдықтың классикалық бөлігі:

$$\begin{aligned} &\delta\vec{\Omega}_{кл} = \frac{3m^4\alpha^3\tilde{D}}{M^4M_0^3}\vec{e}_M = \\ &= \frac{6\pi m\tilde{D}}{\alpha TP^2}\vec{e}_M = \frac{6\pi\tilde{D}}{\gamma m_0 TP^2}\vec{e}_M \end{aligned} \quad (3.38)$$

Бұл өрнек (2.29)-бен пара-пар.

Ал релятивтік бөлігі:

$$\begin{aligned} &\delta\vec{\Omega}_{рел} = -\frac{15m^4\alpha^5\tilde{D}}{2M^6M_0^3c^2}\left(\frac{M^2}{M_0^2} - 2\right)\vec{e}_M = \\ &= \frac{15\pi\tilde{D}}{TP^3c^2}\left(1 + e^2\right)\vec{e}_M \end{aligned} \quad (3.39)$$

(2.30)-бен пара-пар. Біз қайтадан екінші бөлімде есептелген нәтижелерді алдық.

Экваторлық жазықтықта $\tilde{D} = -\frac{\gamma}{4}D$ перигелий ығысу бұрышы:

$$\Delta g = \frac{6\pi\gamma m_0}{Pc^2} - \frac{3\pi D}{2m_0P^2} - \frac{15\pi\gamma D}{4P^3c^2}\left(1 + e^2\right). \quad (3.40)$$

Мұнда бірінші қосынды Шварцшильд есебінде алынған нәтиже, екінші қосынды орталық дененің деформациясына байланысты алынған классикалық түзету, үшінші қосынды деформациядан пайда болған релятивтік түзету. (3.40)-те көрініп тұрғандай орталық дененің деформациясына қатысты классикалық және релятивтік эффектер бір-біріне қосылады. Сөйтіп, бұл эффектерді бір-біріне тәуелсіз зерттеуге болады, яғни суперпозиция принципі орындалады.

Қорытынды

Жұмыста Шварцшильд есебі гармониялық координаттар жүйесінде векторлық элементтер арқылы шығарылды. Гамильтон формализмі көмегімен және орташалау әдісі арқылы ғаламшарлардың перигелийлерінің ығысу өрнегі қорытылды. Бұл әдебиетте белгілі классикалық нәтиже және ЖСТ-ң негізгі үш классикалық эффектерінің бірі болып табылады [1].

Бірінші бөлімде көрсетілген әдістерді тиімді пайдалана отырып, аксиалды-симметриалық өрісте сынақ дененің қозғалысы зерттелді. Ғаламшарлардың перигелийлерінің ығысу өрнегі орталық дененің квадрупольдік моментімен толықтырылды. Бұл өрнекте квадрупольдік моменттің классикалық және релятивтік түзетулерде үлесі бар екені айқын көрсетілді. Есептеулердің барлығы $\sim 1/c^2$ және $\sim D$ жуықтаулары жасалды.

Сонымен бірге, осы есеп адиабаттық инварианттар теориясы арқылы шығарылды. Нәтижесінде екі түрлі жолмен алынған өрнектер бір-

біріне пара-пар болды. Бұл екі әдістің ұқсастықтары мен айырмашылықтары және есепті жүргізу тәртібі (реті) 1-кестеде көрсетілген.

Ұқсастықтары ортақ бағанда, ал айырмашылықтары бөлек бағанда келтірілген. Физикалық тұрғыдан қарастырғанда екі әдістің бір-бірінен еш айырмашылығы жоқ. Ал математикалық тұрғыдан алғанда адиабаттық теориямен жұмыс жасау тиімді болып келеді. Себебі қозғалыс теңдеулерін Гамильтонның канондық теңдеулері арқылы жазудың қажеті жоқ. Мұнда қозғалыс теңдеулері бірден векторлық элементтердің уақыт бойынша туындылары арқылы берілген деп есептеледі. Сондықтан Гамильтон функциясын орбиталық импульс момент және адиабаттық инвариант арқылы өрнектеп алып, Кеплерлік орбита бойынша орташалау жеткілікті болып табылады.

Келешекте дәл осы есепті үш өлшемді кеңістікте қарастыру жоспарда бар.

1-кесте – Мақалада қолданылған екі әдістің ұқсастықтары мен айырмашылықтары

<table>
<tr><td colspan="2">• Метрика ds^2
• Лагранж функциясы $L = -mc\frac{ds}{dt}$
• Жалпылама импульс $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$
• Жалпылама жылдамдық $\vec{v}$ ($\vec{p}$ арқылы өрнектелген)
• Гамильтон функциясы $H = \left(\vec{p}\cdot\vec{v}\right) - L$</td></tr>
<tr><td>1-әдіс (Гамильтон формализмі)
• Жалпылама жылдамдық $\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}$
• Жалпылама күш $\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}$
• Орбиталық импульс моменттің уақыт бойынша туындысы $\dot{\vec{M}} = \left[\dot{\vec{r}}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \dot{\vec{p}}\right]$
• Лапласс векторының уақыт бойынша туындысы $\dot{\vec{A}} = \left[\frac{\dot{\vec{p}}}{m}, \vec{M}\right] + \left[\frac{\vec{p}}{m}, \dot{\vec{M}}\right] - \gamma m m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$
• $\dot{\vec{M}}$ мен $\dot{\vec{A}}$ -ні Кеплерлік орбита бойынша орташалау.</td><td>2-әдіс (Адиабаттық теория)
• Векторлық элементтердің уақыт бойынша туындылары белгілі $\dot{\vec{M}} = \frac{dM}{dt}\vec{e}_M + \left[\vec{\boldsymbol{\Omega}}, \vec{M}\right]$
$\dot{\vec{A}} = \frac{dA}{dt}\vec{e}_A + \left[\vec{\boldsymbol{\Omega}}, \vec{A}\right]$
• Бұрыштық жылдамдық $\vec{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \vec{M}}$
• Гамильтон функциясын M және M_0 арқылы өрнектеу $H = H(M, M_0)$
• Гамильтон функциясын Кеплерлік орбита бойынша орташалау.</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Сынақ дененің орбиталдық бұрыштық жылдамдығы $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$
• Ғаламшарлардың перигелийлерінің ығысу формуласы $\Delta g = \boldsymbol{\Omega} T$</td></tr>
</table>

Әдебиеттер

1 Ohanian H.C. and Ruffini R. Gravitation and Spacetime, 3rd Edition. – Cambridge University Press, Cambridge, England, 2013.

2 Will C.M. Theory and experiment in gravitational physics. Revised edition. – Cambridge University Press, 1993.

3 Wald R.M. General Relativity. – The University of Chicago Press, 1984. – 473 p.

4 Hobson M.P., Efstathio U G.P., Lazenby A.N. General Relativity, An Introduction for Physicists. – Cambridge University Press, 2006. – 592 p.

5 Ryder L. Introduction to General Relativity. – Cambridge University Press, 2009. – 460 p.

6 Schutz B.F. A First course in General Relativity. – Cambridge University Press. 2009. – 412 p.

7 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория Поля. – М.: Физматлит, 2003. –536 с.

8 Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: Наука, 1961.

9 Абдильдин М.М. Механика теории гравитации Эйнштейна. – Алма-Ата: Наука, 1988. – 200 с.

10 Абдильдин М.М. Проблема движения тел в общей теории относительности. – Алматы: Қазақ Университеті, 2006. –132 с.

11 Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. – М.: Наука, 1972.

12 Абдильдин М.М., Баимбетов Ф.Б., Жусупов М.А., Кожамкулов Т.А., Рамазанов Т.С., Омаров М.С. Исследование проблем фундаментальных взаимодействий в теоретической физике. – Алматы. 1997. –141 с.

13 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М.: Физматлит, 2004. – 224 с.
14 Stephani H., Kramer D., MacCallum M.A H., Hoenselaers C., and Herlt E. Exact Solutions of Einstein's Field Equations. – Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
15 Boshkayev K., Quevedo H., Ruffini R. Gravitational Field of Compact Objects in General Relativity // Physical Review D. – 2012. – Vol. 86. – 064043.
16 Queverdo H., Mashhoon B. Exterior gravitational field of a rotating deformed mass // Physics Letters A. –1985. –Vol. 109 (1, 2). – P. 13-18.
17 Queverdo H., Mashhoon B. Exterior gravitational field of a charged rotating mass with arbitrary quadrupole moment // Physics Letters A. –1990. –Vol. 148. – P.149-153.
18 Pachon L.A., Rueda J.A., Sanabria-Gomez J.D. Realistic exact solution for the exterior field of a rotating neutron star // Phys.Rev.D – 2006. – Vol.73. – 104038.
19 Manko V.S., Martin J., Ruiz E. Six-parameter solution of the Einstein–Maxwell equations possessing equatorial symmetry // J. Math. Phys. –1995. –Vol.36. – 3063.
20 Manko V.S., Sanabria-Gomez J.D., Manko O.V. Nine-parameter electrovac metric involving rational functions // Phys. Rev. D. – 2000. – Vol 62. – 044048.
21 Bini D., Geralico A., Luongo O., Quevedo H. Generalized Kerr spacetime with an arbitrary mass quadrupole moment: geometric properties versus particle motion // Classical and Quantum Gravity. – 2009. –Vol.26. – 225006.
22 Bini D., Boshkayev K., Geralico A. Tidal indicators in the spacetime of a rotating deformed mass // Classical and Quantum Gravity. – 2012. – Vol.29. – 145003.
23 Bini D., Boshkayev K., Ruffini R. and Siutsou I. Equatorial Circular Geodesics in the Hartle-Thorne Spacetime // Il Nuovo Cimento 36C. – 2013. –Vol.1. – P.31-36.
24 Quevedo H. and Parkes L. Geodesies in the Erez-Rosen space-time // General Relativity and Gravitation. –1989. – Vol.21. – P.1047-1072.
25 Boshkaev K.A., Quevedo H., Abutalip M.S., Kalymova Zh.A., Suleymanova Sh.S. Geodesics in the field of a rotating deformed gravitational source // International Journal of Modern Physics A. – 2016. –Vol. 31(2,3). 1641006 (11p).

References

1 H.C. Ohanian and R. Ruffini. Gravitation and Spacetime, 3rd Edition (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2013).
2 C.M. Will, Theory and experiment in gravitational physics. Revised edition, (Cambridge University Press, 1993).
3 R.M. Wald, General Relativity, (The University of Chicago Press, 1984), 473 p.
4 M.P. Hobson, G.P. Efstathio U and A.N.Lazenby, General Relativity, An Introduction for Physicists,(Cambridge University Press, 2006), 592 p.
5 L. Ryder, Introduction to General Relativity, (Cambridge University Press, 2009), 460 p.
6 B.F. Schutz, A First course in General Relativity, (Cambridge University Press, 2009), 412 p.
7 L.D. Landau and E.M. Livshitz, Teoriya Polya. (M.: Fizmatlit, 2003). 536 p. (in Russ).
8 V.A. Fock, Teoriya prostranstva, vremeni i tyagotenya, (M.: Nauka, 1961), (in Russ).
9 M.M. Abdildin, Mechanica teorii gravitacii Einshteina, (Alma-Ata: Nauka, 1988), 200 p. (in Russ).
10 M.M. Abdildin, Problema dvizhenya tel v obshei teorii otnositelnosti, (Almaty: Kazakh Universiteti, 2006). 132 p. (in Russ).
11 V.A. Brumberg, Reliativistskaya nebesnaya mechanica, (M.: Nauka, 1972).
12 M.M. Abdildin, F.B. Baimbetov, M.A. Jusupov, T.A. Kojamkulov, T.S. Ramazanov and M.S. Omarov. Issledovanie problem fundamentalnyh vzaimodeistvi v teoreticheskoi physice, (Almaty,1997), 141 p.
13 L.D. Landau and E.M. Livchitz, Mechanics (M.: Fizmatlit, 2004). 224 p. (in Russ).
14 H. Stephani, D. Kramer, M. A. H. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt, Exact Solutions of Einstein's Field Equations, (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003).
15 K. Boshkayev, H. Quevedo and R. Ruffini, Physical Review D 86, 064043 (2012). http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.86.064043
16 H.Queverdo and B.Mashhoon, Physics Letters A, 109 (1, 2), 13-18 (1985). https://doi.org/10.1016/0375-9601(85)90381-0
17 H.Queverdo and B.Mashhoon, Physics Letters A 148,149 (1990). https://doi.org/10.1016/0375-9601(90)90770-O
18 L.A. Pachon, J.A. Rueda and J.D.Sanabria-Gomez, Phys.Rev.D.73, 104038 (2016). https://doi.org/10.1103/PhysRevD.73.104038
19 V.S.Manko, J.Martin and E. Ruiz, J.Math.Phys. 36, 3063 (1995). https://doi.org/10.1063/1.531012
20 V.S. Manko, J.D. Sanabria-Gomez and O.V.Manko, Phys.Rev.D. 62, 044048 (2000)
21 D. Bini, A. Geralico, O. Luongo and H. Quevedo, Classical and Quantum Gravity 26, 225006 (2009). https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/22/225006
22 D. Bini, K. Boshkayev and A. Geralico, Classical and Quantum Gravity 29, 145003 (2012). https://doi.org/10.1088/0264-9381/29/14/145003
23 D.Bini, K. Boshkayev, R. Ruffini and I. Siutsou, Il Nuovo Cimento 36C, 1, 31-36 (2013). https://doi.org/10.1393/ncc/i2013-11483-8
24 H. Quevedo and L. Parkes, General Relativity and Gravitation 21, 1047 (1989).
25 K.A.Boshkaev, H.Quevedo, M.S.Abutalip, Zh.A.Kalymova and Sh.S.Suleymanova, IJMA. 31(2,3), 1641006 (2016). https://doi.org/10.1142/S0217751X16410062