Демченко Б.И., Комаров А.А.,
Усольцева Л.А.

Устойчивый метод определения орбит геостационарных спутников при недостатке данных

Изложен алгоритм определения кеплеровских элементов орбит ГСС с учетом априорной информации. Для этого предлагается использовать регулярную систему элементов E_i $(i = 1,\ldots,6)$. Это – вспомогательная система, свободная от той известной математической неопределенности элементов Кеплера, которая связана с их неортогональностью. Элементы предлагаемой вспомогательной системы вычисляются итерационным методом дифференциальных поправок. При этом имеется возможность учесть априорные ограничения и повысить устойчивость алгоритма.

Ключевые слова: кеплеровские элементы, сферические координаты, критериальная функция, дифференциальные поправки.

Demchenko B.I., Komarov A.A.,
Ussoltseva L.A.

Robust method for determining the orbits of geostationary satellites with a lack of data

The algorithm determining the Keplerian orbit elements GSS is presented taking into account a priori information. For it is proposed to use a regular system of elements E_i $(i = 1, \ldots, 6)$. It is support system, free from that famous mathematical uncertainty elements of Kepler, which is associated with their non-orthogonality. Elements of the proposed support system are calculated by iterative method of differential corrections. In this case it is possible to consider a priori limitations and increase the stability of the algorithm.

Key words: Keplerian elements, spherical coordinates, criterion function, differential corrections.

Демченко Б.И., Комаров А.А.,
Усольцева Л.А.

Деректер жетіспеген кезде геостационарлық серіктердің орбитасын анықтау орнықты әдіс

Мақалада априорлық ақпаратты ескеру арқылы геостационарлық серіктердің орбитасының кеплерлік элементтерін анықтау алгоритмі берілген. Ол үшін E_i $(i = 1,\ldots,6)$ элементтер тұрақты жүйесін қолдану ұсынылды. Бұл – қосымша жүйе, белгілі Кеплер элементтерінің математикалық анықталмағандықтан еркін, және олардың ортогоналдық еместігімен байланысты. Ұсынылып отырған қосымша жүйенің элементтері дифференциалдық түзетпелік итерациялық әдіспен есептеледі. Бұл ретте априорлық шектеулерді ескеру және алгоритмнің тұрақтығын жоғарлатуға мүмкіндік бар.

Түйін сөздер: кеплерлік элементтер, сфералық координаттар, өлшемдік функция, дифференциалдық түзетпелер.

УДК 521.1

[1]Демченко Б.И., [2*]Комаров А.А., [1]Усольцева Л.А.

[1]Астрофизический институт им. Фесенкова, Республика Казахстан, г. Алматы
[2]Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
Республика Казахстан, г. Алматы
[*]E-mail: komandr65@mail.ru

УСТОЙЧИВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРБИТ ГЕОСТАЦИОНАРНЫХ СПУТНИКОВ ПРИ НЕДОСТАТКЕ ДАННЫХ

Введение

Для идеального геостационарного спутника (ГСС) кеплеровские элементы орбиты a, e i, Ω, ω, M_0 равны:

– большая полуось $a \approx 42165$ км;
– эксцентриситет $e = 0$;
– наклон плоскости орбиты к плоскости экватора $i = 0$.
– долгота восходящего узла $\Omega = 0$;
– аргумент перигея $\omega = 0$;
– средняя аномалия M_0 на начальный момент t_0 задает положение конкретного ГСС на орбите и может быть любой.

При $e = i = 0$ долгота восходящего узла Ω и аргумент перигея ω не определены, поэтому их естественно считать нулевыми, как это указано выше. Реальные ГСС практически никогда не соответствуют идеальным. Обычно к классу геостационаров относят объекты с периодами от 22 ч до 26 ч, эксцентриситетами до 0.1 и наклонами до 15°.

Кеплеровские элементы имеют ясный геометрический смысл, однако они неудобны для их непосредственного вычисления из наблюдений, прежде всего из-за упомянутой выше неопределенности при малых e, i, что как раз и характерно для ГСС. Это чисто математическая неопределенность, связанная с неортогональностью элементов Кеплера. Мы используем следующую вспомогательную систему элементов E_i ($i = 1,\dots,6$), свободную от этого недостатка:

$$\begin{aligned}
&E_1 = \ln(a); && E_2 = tg(i/2)\cdot\sin(\Omega); && E_3 = tg(i/2)\cdot\cos(\Omega);\\
&E_4 = e\cdot\sin(\Omega+\omega); && E_5 = e\cdot\cos(\Omega+\omega); && E_6 = \Omega+\omega+M_0.
\end{aligned} \quad (1)$$

Вместо множителя $tg(i/2)$ в формулах для E_2, E_3 можно поставить $sin(i)$ или просто $tg(i)$. Некоторые из нижеприведенных формул при этом изменятся, однако суть метода останется прежней.

Если параметры E_i известны, то кеплеровские элементы определяются из следующих формул:

$$\begin{aligned}
&a = \exp(E_1); && e = \sqrt{E_4^2+E_5^2}; && i = 2\cdot arctg\left(\sqrt{E_2^2+E_3^2}\right);\\
&\Omega = arctg\frac{E_2}{E_3}; && \omega = arctg\frac{E_4}{E_5}-\Omega; && M_0 = E_6-\Omega-\omega.
\end{aligned} \quad (2)$$

Вычисление элементов E_i

Для вычисления элементов E_i предлагается использовать итерационный метод дифференциальных поправок с дополнениями, которые позволяют учесть априорные ограничения и повышают устойчивость алгоритма.

Пусть известны приближенные начальные значения элементов E_i. В качестве таковых можно взять значения для орбиты идеального ГСС, а среднюю аномалию определить по наблюдению хотя бы одной точки. Их поправки обозначим через ξ_i, так что на следующей итерации уточненные значения будут равны $E_i + \xi_i$. Для поиска ξ_i используется условие минимума специальной критериальной функции S, состоящей из трех слагаемых [1]:

$$S = S_0 + S_1 + S_2 \ . \tag{3}$$

Их формульные выражения таковы:

$$S_0 = \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\Delta\alpha_i \cdot \cos(\delta_i) \right)^2 + (\Delta\delta_i)^2 \right]$$

(N – количество наблюдений),

$$S_1 = \beta_1 \cdot \left(E_1 + \xi_1 - E_{10}\right)^2 + \beta_2 \cdot \left[\left(E_2 + \xi_2\right)^2 + \left(E_3 + \xi_3\right)^2 \right] + \beta_3 \cdot \left[\left(E_4 + \xi_4\right)^2 + \left(E_5 + \xi_5\right)^2 \right], \tag{4}$$
$$S_2 = \beta_4 \cdot \xi_1^2 + \beta_5 \cdot \left(\xi_2^2 + \xi_3^2\right) + \beta_6 \cdot \left(\xi_4^2 + \xi_5^2\right) + \beta_7 \cdot \xi_6^2 .$$

Здесь S_0 – основное слагаемое, обеспечивающее согласованность расчетов с наблюдениями; S_1 – первое дополнительное слагаемое, позволяющее учесть априорные знания относительно класса наблюдаемых объектов; S_2 – второе дополнительное слагаемое, которое обеспечивает устойчивость алгоритма. Такой прием часто используется при решении задач, некорректных по Адамару [2]. Через α, δ обозначены сферические топоцентрические экваториальные координаты объекта; $\Delta\alpha_i$, $\Delta\delta_i$ – разности наблюдаемых и вычисленных координат в момент t_i; E_{10} – постоянная величина, численно равная значению элемента E_1 для идеального ГСС (например, $E_{10} = ln42165$); β_k – заранее заданные малые множители, варьируя которые можно добиться желаемого компромисса между согласованностью с исходными данными, устойчивостью алгоритма и степенью учета априорных ограничений. Если все β_k задать равными нулю, то мы получим стандартный метод дифференциальных поправок. Заметим, что дополнительные слагаемые S_1, S_2 квадратичны относительно ξ_i. Следовательно, они не нарушают линейности метода наименьших квадратов. Мы выбрали дополнительные слагаемые в виде (4), хотя это необязательно. Если имеется какая-то иная априорная информация, то формулы (4) можно соответственно изменить, исходя из количества и качества этой информации.

С точностью до членов первого порядка малости, разности наблюдаемых и вычисленных координат выражаются следующими формулами [3]:

$$\rho \cdot \cos(\delta) \cdot \Delta\alpha = -\sin(\alpha) \cdot \Delta X + \cos(\alpha) \cdot \Delta Y,$$
$$\rho \cdot \Delta\delta = -\sin(\delta) \cdot \left[\cos(\alpha) \cdot \Delta X + \sin(\alpha) \cdot \Delta Y \right] + \cos(\delta) \cdot \Delta Z, \tag{5}$$

где ΔX, ΔY, ΔZ – дифференциальные поправки к геоцентрическим прямоугольным координатам X, Y, Z; ρ – вычисленное топоцентрическое расстояние до ГСС. Параметры X, Y, Z, ρ, а также используемые ниже производные X', Y', Z' вычисляются на каждый момент по известным формулам небесной механики [3]. Эти формулы здесь не приводятся. Напомним, что координаты X, Y, Z отсчитываются от центра Земли, а ρ – от точки на ее поверхности.

Далее, в линейном приближении поправки ΔX, ΔY, ΔZ могут быть записаны в виде:

$$\Delta X = \sum_{k=1}^{6} \left(\frac{\partial X}{\partial E_k} \right) \cdot \xi_k ; \qquad \Delta Y = \sum_{k=1}^{6} \left(\frac{\partial Y}{\partial E_k} \right) \cdot \xi_k ; \qquad \Delta Z = \sum_{k=1}^{6} \left(\frac{\partial Z}{\partial E_k} \right) \cdot \xi_k . \tag{6}$$

Выражения частных производных орбиты выглядят следующим образом через время, координаты и элементы [1,3]:

$$\frac{\partial X}{\partial E_1} = X - 1.5\cdot(t-t_0)\cdot X'; \quad \frac{\partial Y}{\partial E_1} = Y - 1.5\cdot(t-t_0)\cdot Y'; \quad \frac{\partial Z}{\partial E_1} = Z - 1.5\cdot(t-t_0)\cdot Z';$$
$$\frac{\partial X}{\partial E_2} = Z - X\cdot W_1; \quad \frac{\partial Y}{\partial E_2} = X\cdot W_2; \quad \frac{\partial Z}{\partial E_2} = -X\cdot W_3;$$
$$\frac{\partial X}{\partial E_3} = Y\cdot W_1; \quad \frac{\partial Y}{\partial E_3} = -Z - Y\cdot W_2; \quad \frac{\partial Z}{\partial E_3} = Y\cdot W_3; \tag{7}$$
$$\frac{\partial X}{\partial E_4} = u_x A - g_x B + r_x C + h_x D; \quad \frac{\partial Y}{\partial E_4} = u_y A - g_y B + r_y C + h_y D; \quad \frac{\partial Z}{\partial E_4} = u_z A - g_z B + r_z C + h_z D;$$
$$\frac{\partial X}{\partial E_5} = r_x A - h_x B + u_x C + g_x D; \quad \frac{\partial Y}{\partial E_5} = r_y A - h_y B + u_y C + g_y D; \quad \frac{\partial Z}{\partial E_5} = r_z A - h_z B + u_z C + g_z D;$$
$$\frac{\partial X}{\partial E_6} = \frac{X'}{n}; \qquad \frac{\partial Y}{\partial E_6} = \frac{Y'}{n}; \qquad \frac{\partial Z}{\partial E_6} = \frac{Z'}{n}.$$

Здесь введены такие обозначения:

$X' = \frac{dX}{dt}$; $\quad Y' = \frac{dY}{dt}$; $\quad Z' = \frac{dZ}{dt}$ – производные от X, Y, Z по времени;

$$W_1 = \sin(i)\cdot\sin(\Omega); \qquad W_2 = \sin(i)\cdot\cos(\Omega); \qquad W_3 = 1 + \cos(i);$$
$$u_x = a\cdot\sin(\Omega+\omega)\cdot Q_x; \qquad u_y = a\cdot\sin(\Omega+\omega)\cdot Q_y; \qquad u_z = a\cdot\sin(\Omega+\omega)\cdot Q_z;$$
$$g_x = a\cdot\sin(\Omega+\omega)\cdot P_x; \qquad g_y = a\cdot\sin(\Omega+\omega)\cdot P_y; \qquad g_z = a\cdot\sin(\Omega+\omega)\cdot P_z;$$
$$r_x = a\cdot\cos(\Omega+\omega)\cdot Q_x; \qquad r_y = a\cdot\cos(\Omega+\omega)\cdot Q_y; \qquad r_z = a\cdot\cos(\Omega+\omega)\cdot Q_z;$$
$$h_x = a\cdot\cos(\Omega+\omega)\cdot P_x; \qquad h_y = a\cdot\cos(\Omega+\omega)\cdot P_y; \qquad h_z = a\cdot\cos(\Omega+\omega)\cdot P_z; \tag{8}$$
$$P_x = \cos(\Omega)\cdot\cos(\omega) - \sin(\Omega)\cdot\sin(\omega)\cdot\cos(i); \qquad P_y = \sin(\Omega)\cdot\cos(\omega) + \cos(\Omega)\cdot\sin(\omega)\cdot\cos(i);$$
$$P_z = \sin(\omega)\cdot\sin(i);$$
$$Q_x = -\cos(\Omega)\cdot\sin(\omega) - \sin(\Omega)\cdot\cos(\omega)\cdot\cos(i); \qquad Q_y = -\sin(\Omega)\cdot\sin(\omega) + \cos(\Omega)\cdot\cos(\omega)\cdot\cos(i);$$
$$Q_z = \cos(\omega)\cdot\sin(i);$$
$$A = \frac{\sin(E)\cdot[\cos(E) - e]}{V_2\sqrt{1-e^2}}; \qquad B = \frac{1+\sin^2(E)}{V_2};$$

$$C=\frac{\cos(E)\cdot\left[e-\cos(E)+V_1\right]-1}{V_2};\qquad D=\frac{\sin(E)\cdot\left[V_1+\cos(E)\sqrt{1-e^2}\right]}{V_2}$$

$$V_1=\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}};\qquad V_2=1-e\cdot\cos(E).$$

Эксцентрическая аномалия E связана с текущим временем t уравнением Кеплера

$$E-e\cdot\sin(E)=M_0+n\cdot(t-t_0),$$

среднее движение n дается формулой

$$n=\sqrt{\mu/a^3}\ ,$$

где μ=398600.5 км^3/с^2 – гравитационный параметр Земли.

Подставляя формулы (4)-(8) в (3), мы получим критериальную функцию S в виде квадратичной формы относительно искомых величин ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5, ξ_6. Приравнивая соответствующие частные производные к нулю, сведем задачу к решению нормальной системы из шести линейных уравнений с шестью неизвестными. Для оценки погрешностей можно использовать метод, изложенный в [3] или в других руководствах по методу наименьших квадратов.

Численные значения множителей β_k обычно лежат в пределах от 10^{-6} до 10^{-3}. Вначале их можно определить любым из методов, предложенных в работах [2,4], а затем уточнить по статистике наблюдений.

Заключение

Используя итерационный метод дифференциальных поправок с дополнениями, вычислены элементы E_i регулярной системы. Это сделано с возможностью учета априорных ограничений и повышения устойчивости алгоритма.

Литература

1 Демченко Б.И. Об определении параметров орбит ГСС по коротким временным рядам наблюдений // Изв.НАН РК. – 2007. – №4 (254). – С. 97-99.

2 Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 323 с.

3 Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г.Н. Дубошина. – М.: Наука, 1976. – 864 с.

4 Арефьева М.В. Решение уравнения типа свертки методом регуляризации с применением быстрого преобразования Фурье и критерия невязки // Вычислительные методы и программирование. – 1981. – Вып.35. – С. 51-68.

References

1 B.I. Demchenko, Izv. NAN RK. Ser. fiz.-mat., №4(254), (2007).

2 A.N. Tihonov, V.Ja. Arsenin, Methods for solving incorrect problems. M., Nauka, 1974, 323.

3 Reference Guide to celestial mechanics and astrodynamics. Under edition of G.N. Duboshin. M., Nauka, 1976, 864.

4 M.V. Aref'eva, Numerical Methods and Programming, 35, 51-68, (1981).