

Уразалина А.А.,  
Джунушалиев В.Д.,  
Махмудов А.А.

**Горловинные решения в ОТО  
с двумя фантомными  
скалярными полями**

В статье исследованы регулярные горловинные решения в общей теории относительности, создаваемые двумя фантомными скалярными полями. Показано, что данные регулярные решения, имеющие конечную энергию, существуют только при некоторых определенных значениях параметров  $m_1, m_2$ . Решения соответствующих полевых уравнений получены в численном виде как решение нелинейной задачи на собственные значения, где собственными значениями являются параметры  $m_1, m_2$ , а собственными функциями – скалярные поля. Получены семейства решений, зависящие от значений одного из скалярных полей в центре горловины. Для каждого семейства решений вычислена масса горловины. Исследована зависимость параметров системы  $m_1, m_2$  от начальных значений  $\chi_0$ .

**Ключевые слова:** горловинные решения, фантомные скалярные поля.

Urazalina A.A.,  
Dzhunushaliev V.D.,  
Makhmudov A.A.

**Wormhole solutions in GR with two  
phantom scalar fields**

Wormhole solutions in general relativity created with two phantom scalar fields are investigated. It has been shown that the solutions with finite energy exist for some specific values of the parameters  $m_1, m_2$  only. Corresponding field equations are solved numerically as nonlinear eigenvalue problem where the parameters  $m_1, m_2$ , are eigenvalues and scalar fields are eigenfunctions. The family of solutions depending on values of scalar fields at the center of wormhole mouth is obtained. The wormhole masses for each family of solutions is calculated numerically. The dependence of parameters  $m_1, m_2$  on initial values  $\chi_0$  is investigated.

**Key words:** wormhole solutions, phantom scalar fields.

Уразалина А.А.,  
Джунушалиев В.Д.,  
Махмудов А.А.

**ЖСТ-дағы екі фантомдық  
скалярлық өрістері бар  
өңештік шешімдер**

Мақалада жалпы салыстырмалылық теориядағы екі фантомдық скалярлық өрістер тудыратын, регулярлық өңештік шешімдер қарастырылған. Шектеулі энергиясы бар регулярлық шешімдердің тек  $m_1, m_2$  параметрлерінің кейбір белгілі мәндері кезінде ғана болатындығы көрсетілген. Сәйкес өрістік теңдеулердің шешімдері меншікті мәндерге түзілген сызықсыз теңдеудің шешімі ретінде сандық түрде алынған, мұндағы  $m_1, m_2$  параметрлер меншікті мәндер болып табылады, ал меншікті функциялар – скалярлық өрістер. Өңештің центрінде скалярлық өрістердің бірінің мәндеріне тәуелді болатын шешімдер үйірі алынған. Әрбір шешімдер үйірі үшін сандық түрде өңештің массасы есептелген. Жүйенің  $m_1, m_2$  параметрлерінің  $\chi_0$  бастапқы мәндерге тәуелділігі зерттелген.

**Түйін сөздер:** өңештік шешімдер, фантомдық скалярлық өрістер.

**ГОРЛОВИННЫЕ  
РЕШЕНИЯ В ОТО  
С ДВУМЯ  
ФАНТОМНЫМИ  
СКАЛЯРНЫМИ  
ПОЛЯМИ****Введение**

В настоящее время существует довольно много работ, исследующих асимптотически плоские решения, создаваемые фундаментальными полями: электромагнитным, скалярным и т.д. Особый интерес среди них представляют регулярные решения, то есть решения, имеющие конечную энергию.

В данной работе мы исследуем регулярные решения в общей теории относительности, где гравитирующей материей являются два фантомных скалярных поля. В [1] получены сферически симметричные, плоские и горловинные решения для такого рода фантомных скалярных полей. В данной работе мы проводим более детальное исследование решений, полученных в [1].

Кротовой норой (кротовиной, червоточинной, горловиной) называется гипотетическая, топологическая особенность пространства-времени, представляющая собой в каждый момент времени туннель, соединяющий две асимптотически плоские области пространства, или два разных пространства.

В принципе в общей теории относительности могут существовать такого рода туннели. Однако проходимость кротовые норы могут существовать только в том случае, если будут заполнены экзотической материей с отрицательной плотностью энергии [2], которое необходимо для сильного гравитационного отталкивания в центре горловины, то есть фактически для создания горловины. Кротовые норы могут играть значительную роль в квантовой гравитации (в пространственно – временной пене). В зависимости от кривой, соединяющей ее входы не пересекая горловину, различают кротовые норы типа intra-universe, или внутримировые и inter-universe, или межмировые.

Кротовые норы могут быть проходимыми и непроходимыми. Непроходимые кротовые норы это туннели, которые коллапсируют настолько быстро, что ни наблюдатель, ни световой сигнал не успевают пройти расстояние от одного входа горловины до другого за время коллапса горловины. Примером непроходимой кротовой норы является мост Эйнштейна-Розена в максимально расширенном пространстве Шварцшильда. А в качестве примера проходимой кротовой норы можно привести кротовину Морриса-Торна.

Гипотетическую возможность путешествия во времени дает проходимость внутримировая кротовина. Для этого необходимо, чтобы один из ее входов двигался относительно другого или находился бы в сильном гравитационном поле. Кротовые норы также гипотетически дают возможность для межзвёздных путешествий, что часто описывается в научной фантастике.

Для существования кротовой норы необходимо наличие экзотической материи, которая представляет собой гипотетическое вещество, нарушающее классические энергетические условия, либо не состоящее из известных барионов. Подобное вещество должно обладать такими экзотическими свойствами, как отрицательная плотность энергии и, следовательно отталкивание, а не притяжение вследствие гравитации. Экзотическая материя используется для построения кротовых нор. Наиболее известным представителем экзотической материи является вакуум в области с отрицательным давлением производимым эффектом Казимира [3].

В общей теории относительности экзотической называется материя, нарушающая слабое

энергетическое условие, что означает, что ее плотность энергии в некоторой системе отсчета является отрицательной. Если в некотором ортонормированном базисе тензор энергии-импульса диагонален, то слабое энергетическое условие нарушается, когда отрицательна его компонента, соответствующая плотности энергии.

### Общие уравнения

Уравнения Эйнштейна можно записать в виде

$$G_i^k = 8\pi G T_i^k. \quad (1)$$

Уравнения для фантомных скалярных полей представлены в виде

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial(\phi, \chi)}{\partial x^\nu} \right] = - \frac{\partial V}{\partial(\phi, \chi)}. \quad (2)$$

Мы рассмотрим два взаимодействующих фантомных скалярных поля, имеющих специальный вид потенциальной энергии:

$$V(\phi, \chi) = \frac{\lambda_1}{4} (\phi^2 - m_1^2)^2 + \frac{\lambda_2}{4} (\chi^2 - m_2^2)^2 + \phi^2 \chi^2 - V_0. \quad (3)$$

Здесь  $\phi$  и  $\chi$  два скалярных поля с некоторыми параметрами  $m_1$  и  $m_2$ ,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются константами самодействия и  $V_0$  некоторая константа, ко-

торая должна быть выбрана при постановке задачи. Соответствующий тензор энергии-импульса будет выглядеть следующим образом:

$$T_i^k = \varepsilon \left\{ \partial_i \phi \partial^k \phi + \partial_i \chi \partial^k \chi - \delta_i^k \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\phi, \chi) \right] \right\} \quad (4)$$

### Горловинные решения

Мы будем искать статические решения уравнений (1) и (2) для горловинной метрики:

$$ds^2 = B(r) dt^2 - dr^2 - A(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5)$$

где  $A(r), B(r)$  являются четными функциями, зависящими только от координаты  $r$ , которая изменяется в пределах  $-\infty < r < +\infty$ .

Используя метрику (5), можно получить из (1) и (4) уравнения (при  $\varepsilon = -1$ )

$$\frac{A''}{A} - \frac{1}{2} \left( \frac{A'}{A} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{A' B'}{A B} = \phi'^2 + \chi'^2, \quad (6)$$

$$\frac{A''}{A} + \frac{1}{2} \frac{A' B'}{A B} - \frac{1}{2} \left( \frac{A'}{A} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{B'}{B} \right)^2 + \frac{B''}{B} = 2 \left[ \frac{1}{2} (\phi'^2 + \chi'^2) + V \right], \quad (7)$$

$$\frac{1}{4} \left( \frac{A'}{A} \right)^2 - \frac{1}{A} + \frac{1}{2} \frac{A' B'}{A B} = - \frac{1}{2} (\phi'^2 + \chi'^2) + V, \quad (8)$$

где штрих означает дифференцирование по  $r$ . Уравнение (6) было получено вычитанием  $(r)$  компоненты из  $(t)$  компоненты уравнения Эйнштейна (1), уравнения (7) и (8) являются

$(\theta)$  и  $(r)$  компонентами уравнения (1). Соответствующие полевые уравнения для скалярных полей, полученные из (2) имеют следующий вид

$$\phi'' + \left(\frac{A'}{A} + \frac{1}{2} \frac{B'}{B}\right) \phi' = \phi[2\chi^2 + \lambda_1(\phi^2 - m_1^2)], \quad (9)$$

$$\chi'' + \left(\frac{A'}{A} + \frac{1}{2} \frac{B'}{B}\right) \chi' = \chi[2\phi^2 + \lambda_2(\chi^2 - m_2^2)]. \quad (10)$$

Уравнения (6) - (10) записаны в следующих безразмерных величинах:  $r \rightarrow \sqrt{8\pi G}r, \phi \rightarrow \frac{\phi}{\sqrt{8\pi G}}, \chi \rightarrow \frac{\chi}{\sqrt{8\pi G}}, m_{1,2} \rightarrow \frac{m_{1,2}}{\sqrt{8\pi G}}$ .

Как было показано в предыдущих исследованиях в задачах с потенциалом (3) [4], регулярные решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (6) - (10) существуют только для некоторых значениях масс скалярных полей  $m_1, m_2$ , которые зависят от значений скалярных полей в центре горловины (при фиксированных значениях констант самодействия  $\lambda_1, \lambda_2$ ). Таким образом, задача состоит в поиске таких параметров  $m_1, m_2$ , которые дают регулярные решения. В этом смысле задача сводится к поиску собственных значений  $m_1, m_2$  и соответствующих собственных функций  $A, B, \phi, \chi$  для нелинейной системы дифференциальных уравнений (6) - (10).

Метод получения решений для уравнений (6) - (10) подробно описана в работе [5]. Суть метода заключается в следующем. В первом шаге решается уравнение (9) с некоторой произвольно выбранной функцией  $\chi$ , в ходе которого ищется регулярное решение, существующее только при данном значении параметра  $m_1$ . На этом этапе влияние гравитационное учитывается. Затем, полученное решение для функции  $\phi$  используется для решения уравнения (10) путем подбора значения параметра  $m_2$ , соответс-

твующему регулярному решению. Эта процедура повторяется несколько раз, до тех пор пока не получается приемлемая сходимость значений параметров  $m_1, m_2$ . После этого, полученные функции  $\phi, \chi$  используются для решения гравитационных уравнений (6) и (7). Уравнение (8), которое, по сути является ограничивающим условием, используется для задания граничных условий. Полученные решения для метрических функций  $A, B$  подставляются в полную систему уравнений для скалярных полей (9) и (10), и система решается для того, чтобы найти собственные значения параметров  $m_1, m_2$  уже с учетом гравитации. Эта процедура повторяется столько раз, сколько необходимо, чтобы получить приемлемую сходимость значений параметров  $m_1, m_2$ .

Описанная процедура по поиску решений системы (6) - (10), также известная под названием «метод стрельбы», позволяет довольно быстро найти значения параметров  $m_1, m_2$ , при которых существуют регулярные решения. Проверка полученных решений у нас осуществлена с использованием команды NDSolve в программе Mathematica, подстановкой собственных  $m_1, m_2$  и решением уравнений (6), (7), (9), (10) непосредственно.

Граничные условия выбраны с учетом  $\mathbb{Z}_2$  симметрии в виде

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \sqrt{3}, & \phi'(0) &= 0, \\ \chi(0) &= \sqrt{3}, & \chi'(0) &= 0, \\ A(0) &= -\frac{1}{V(\phi(0), \chi(0))}, & A'(0) &= 0, \\ B(0) &= \sqrt{3}, & B'(0) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где условие  $A(0)$  выбирается так, чтобы удовлетворять ограничению (8) при  $r = 0$ ,  $V(\phi(0),$

$\chi(0))$  – значение потенциала при  $r = 0$  и постоянных самодействия  $\lambda_1 = 0,1$  и  $\lambda_2 = 1$ .

Затем, используя описанную выше процедуру для получения решения системы (6) - (10), мы получаем результаты, представленные на рис. 1-6. Как видно из рис. 1 и 2,  $\phi \rightarrow m_1$  и  $\chi \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \pm\infty$ . Это соответствует асимптотическому переходу решений в локальный минимум потенциала (1). Произвольная постоянная  $V_0$

была выбрана таким образом, чтобы значение потенциала в локальном минимуме было равно нулю, а именно,  $V_0 = (\lambda_2/4)m_2^4$ . Такой выбор  $V_0$  обеспечивает нулевое значение плотности энергии при  $r \rightarrow \pm\infty$  (рис. 3).

Плотность энергии

$$\varepsilon = T_0^0 = -\frac{1}{2}(\phi'^2 + \chi'^2) + \frac{\lambda_1}{4}(\phi^2 - m_1^2)^2 + \frac{\lambda_2}{4}(\chi^4 - 2m_2^2\chi^2) + \phi^2\chi^2.$$

Масса горловины вычисляется по формуле

$$M = 4\pi A_0 - 4\pi \int \left( \frac{1}{2}(\phi'^2 + \chi'^2) + \frac{\lambda_1}{4}(\phi^2 - m_1^2)^2 + \frac{\lambda_2}{4}(\chi^4 - 2m_2^2\chi^2) + \phi^2\chi^2 \right) x^2 dx,$$

где  $A_0 = A(0)$ . Зависимость массы кротовой норы от  $\chi_0$  показана на рис. 4.

Оценим асимптотическое поведение решений. Для этой цели мы будем искать решения уравнений (9) и (10) в виде

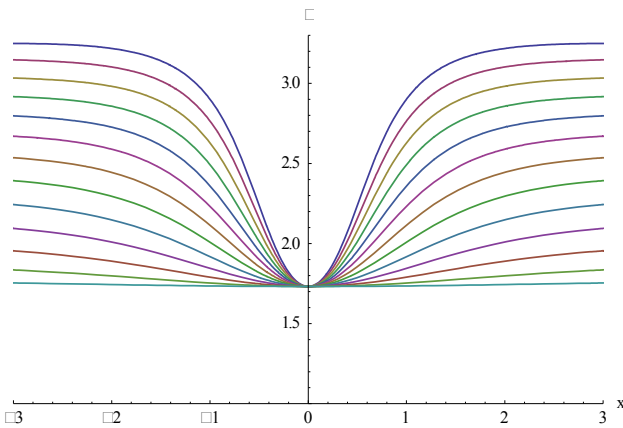
$$\phi = m_1 - \delta\phi, \quad \chi = \delta\chi, \quad (12)$$

где  $\delta\phi, \delta\chi \ll 1$  при  $r \rightarrow \pm\infty$ . Тогда правые части уравнений (6) и (7) будут стремиться к нулю, а их частные решения

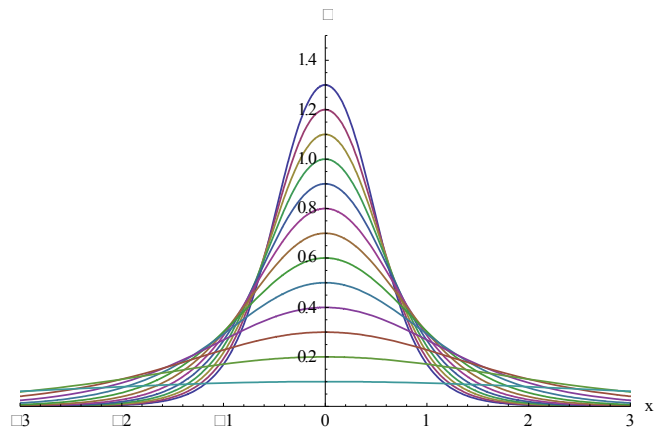
$$A \approx r^2 + r_0^2, \quad (13)$$

$$B \approx B_\infty \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right), \quad (14)$$

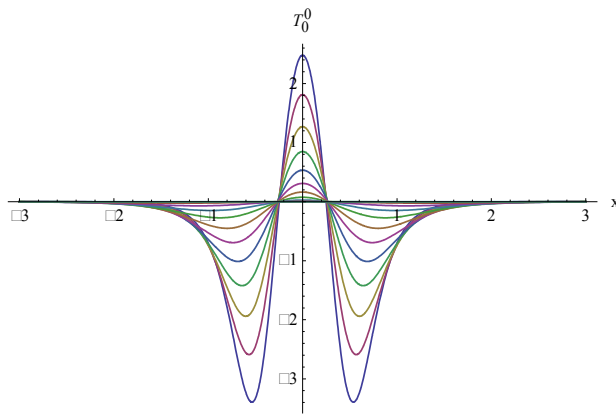
где  $r_0$  и  $B_\infty$  некоторые постоянные. Практически,  $r_0^2$  определяет общую массу червоточины, а  $B_\infty$  темп времени на бесконечности. При соответствующем переопределении времени  $t$ , эти решения могут быть приведены к плоской форме в сферических координатах, т. е. асимптотически можно получить плоское пространство-время Минковского (рис. 5 и 6).



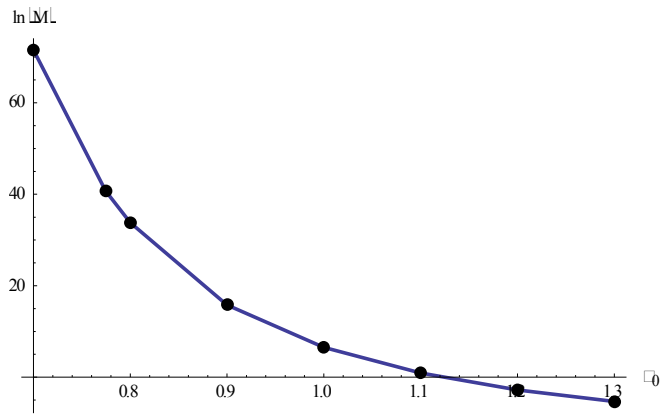
**Рисунок 1** – Скалярные поля  $\phi$  в модели кротовых нор для граничных условий, заданных в уравнении (11). Нижний график соответствует значению  $\chi_0 = 0.1$ , верхний график  $\chi_0 = 1.3$ .



**Рисунок 2** – Скалярные поля  $\chi$  в модели кротовых нор для граничных условий, заданных в уравнении (11). Нижний график соответствует значению  $\chi_0 = 0.1$ , верхний график  $\chi_0 = 1.3$ .



**Рисунок 3** – Графики плотности энергии  $T_0^0(r)$  при разных  $\chi_0$ .



**Рисунок 4** – Зависимость массы кротовой норы от  $\chi_0$ .

Тогда, принимая во внимание уравнения (13) и (14), соответствующие асимптотические формулы для скалярных полей (9) и (10) можно переписать в виде

$$\delta\phi'' + \frac{2}{r}\delta\phi' = 2\lambda_1 m_1^2 \delta\phi,$$

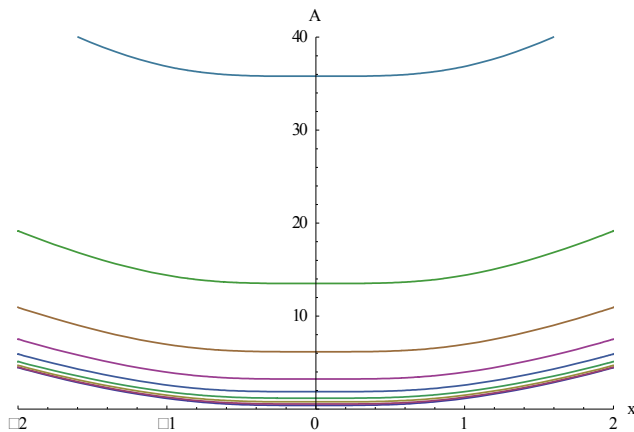
$$\delta\chi'' + \frac{2}{r}\delta\chi' = (2m_1^2 - \lambda_2 m_2^2)\delta\chi,$$

с экспоненциально быстро затухающими решениями

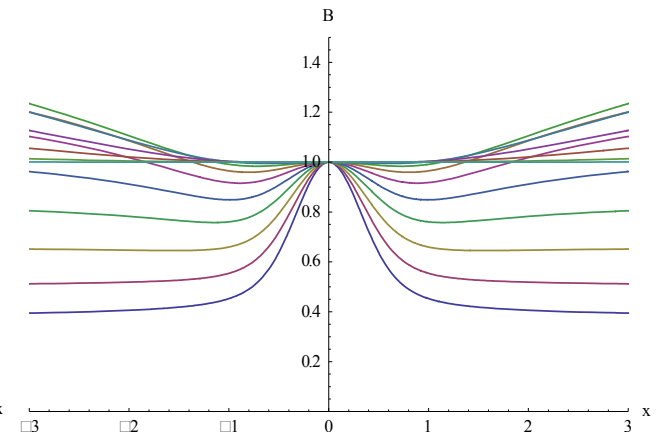
$$\delta\phi \approx C_\phi \frac{\exp(-r\sqrt{2\lambda_1 m_1^2})}{r},$$

$$\delta\chi \approx C_\chi \frac{\exp(-r\sqrt{(2m_1^2 - \lambda_2 m_2^2)})}{r},$$

где  $C_\phi, C_\chi$  постоянные интегрирования. Таким образом, асимптотически решения переходят в вакуумные, с нулевой плотностью энергии (рис. 3).



**Рисунок 5** – Метрическая функция  $A$  в модели кротовых нор. Нижний график соответствует значению  $\chi_0 = 1.3$ , верхний график  $\chi_0 = 0.5$ .



**Рисунок 6** – Метрическая функция  $B$  в модели кротовых нор. Нижний график соответствует значению  $\chi_0 = 0.1$ , верхний график  $\chi_0 = 1.3$ .

**Таблица 1** – Начальные значения  $\chi_0$  и соответствующие значения параметров  $m_1$ ,  $m_2$  для системы (9) и (10).

№	$\phi_0$	$\chi_0$	$m_1$	$m_2$	$M$
1	$\sqrt{3}$	0.1	1.777273191608	2.476347750923	$1.8348584992936 \cdot 10^6$
2	$\sqrt{3}$	0.2	2.476347750923	2.523545111005	95687.7278721848
3	$\sqrt{3}$	0.3	2.0046228705008	2.5796495919404	8390.263367541771
4	$\sqrt{3}$	0.4	2.1456814785693	2.642732689365	1566.7442306019846
5	$\sqrt{3}$	0.5	2.28993270047	2.71208266684195	445.92892110730304
6	$\sqrt{3}$	0.6	2.431018088	2.7869698423	164.78034880096536
7	$\sqrt{3}$	0.7	2.56582282473	2.866518676871	71.56025520199823
8	$\sqrt{3}$	$\sqrt{0.6}$	2.661816	2.928334358	40.73435038258172
9	$\sqrt{3}$	0.8	2.6935822641	2.9498001620714	33.796699803516645
10	$\sqrt{3}$	0.9	2.8149557818841	3.03592981240822	15.809861541244816
11	$\sqrt{3}$	1.0	2.93131695433	3.124117429763	6.512088017962366
12	$\sqrt{3}$	1.1	3.04430360783	3.2136796392	0.8945440041910544
13	$\sqrt{3}$	1.2	3.1555799484	3.3040346075	-2.7711749280271842
14	$\sqrt{3}$	1.3	3.2676254754	3.39465931023	-5.314067727568411

### Заключение

Таким образом, в этой статье мы получили семейства горловинных решений в общей теории относительности, создаваемые двумя фантомными скалярными полями. Для получения регулярных решений (имеющих конечную массу) соответствующие полевые уравнения рассматривались

как нелинейная задача на собственные значения для параметров  $m_1$ ,  $m_2$  и с собственными функциями  $\phi(r)$ ,  $\chi(r)$ . Полученные решения представлены в виде семейства графиков для функций  $A(r)$ ,  $B(r)$ ,  $\phi(r)$ ,  $\chi(r)$ . Для каждой пары собственных значений  $m_1$ ,  $m_2$  рассчитана масса горловины и по полученным данным построена зависимость этой массы от  $\chi_0$ .

### References

- 1 Dzhunushaliev V., Folomeev V. 4D static solutions with interacting phantom fields// Int. J. Mod. Phys. D – 2008. – Vol.17, No. 11, 2125-2142. arXiv:0711.2840 [gr-qc].
- 2 DeBenedictis A., Das A. On a General Class of Wormhole Geometries// Class.Quant.Grav. 18. – 2001. – 1187 - 1204. arXiv:gr-qc/0009072.
- 3 Fuller R.W., Wheeler J.A. Causality and Multiply Connected Space-Time// Phys. Rev. – 1962. – Vol. 128, № 2. – P.919-929.
- 4 Dzhunushaliev V., Folomeev V., Myrzakulov K., Myrzakulov R. Phantom fields: Bounce solutions in the early Universe and S-branes// Int.J.Mod.Phys. – 2008. – gr-qc/0608025.
- 5 Dzhunushaliev V. Scalar model of the glueball // Hadron. J. Suppl, 19 – 2004. – 185-205.