Бакирова Э.М., Фоломеев В.Н.

Хамелеоновая космология: функция неминимального взаимодействия из наблюдательных данных

Используя данные космологических и астрономических наблюдений, в рамках хамелеоновой космологии получено общее выражение на функцию неминимального взаимодействия f между скалярным полем и веществом (обычным и/или темным). Скалярное поле предполагается однородно и изотропно распределенным по пространству. Эффективная масса кванта поля полагается малой на космологических масштабах, но растет в плотном окружении (на Земле). Это позволяет удовлетворить лабораторным тестам и экспериментам в Солнечной системе. Скорость современного расширения Вселенной аппроксимируется параметром Хаббла, выбираемым в статье на основе использования модели «космологический Λ-член плюс холодная темная материя». В случае безмассового скалярного поля для такого анзаца найдено аналитическое выражение на функцию f, справедливое для современной Вселенной.

Ключевые слова: хамелеоновая космология, скалярное поле.

Bakirova E.M., Folomeev V.N.

Chameleon cosmology: the nonminimal coupling function from the observational data

Using the cosmological and astronomical observational data, the general expression for the nonminimal coupling function f between a scalar field and matter (ordinary and/or dark) is obtained within the framework of chameleon cosmology. The scalar field is assumed to be homogeneously and isotopically distributed over spacetime. The effective mass of the scalar field is taken to be small on cosmological scales, but it increases in the dense environment (on Earth). This allows the laboratory tests and experiments in the solar system to be satisfied. The expansion rate of the present Universe is approximated by the Hubble parameter, which is chosen here using the model "cosmological Λ-term plus cold dark matter". In the case of massless scalar field, for such an ansatz the analytical expression for f valid for the present Universe is found.

Key words: chameleon cosmology, scalar field.

Бакирова Э.М., Фоломеев В.Н.

Хамелеондық ғарышнама: бақыланатын деректерден минималды емес өзара әсерлесудің функциясы

Космологиялық және астрономиялық бақылаулар деректерін пайдалана отырып, хамелеондық ғарышнама шеңберінде скалярлық өріс және зат (кәдімгі және/ немесе қоңыр) арасындағы минималды емес өзара әсерлесу f функциясына жалпы өрнек алынды. Скалярлық өріс кеңістікте біртекті және изотропты таралатындығы болжанды. Өріс квантының эффективті массасы космологиялық масштабта аз болуы, бірақ есептелу толық шеңберде (Жерде) болатындығы болжанды. Бұл зертханалық тесттерді және Күн жүйесіндегі тәжірибелерді қанағаттандыруға мүмкіндік береді. Мақалада «космологиялық Λ-мүше және суық қоңыр материя» моделін пайдалану негізінде таңдау, заманауи әлемнің ұлғаюы жылдамдығын Хаббл параметрімен аппроксимацияланады. Массасыз скаляларлық өріс жағдайында осындай анзац үшін заманауи әлем үшін орындалатын, f функциясына аналитикалық өрнек табылды.

Түйін сөздер: хамелеондық ғарышнама, скалярлық өріс.

УДК 524.834

[1]Бакирова Э.М., [2*]Фоломеев В.Н.

[1]Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына,
Кыргызская Республика, г. Бишкек
[2]Институт физ.-тех. проблем и материаловедения НАН КР,
Кыргызская Республика, г. Бишкек
[*]E-mail: vfolomeev@mail.ru

ХАМЕЛЕОНОВАЯ КОСМОЛОГИЯ: ФУНКЦИЯ НЕМИНИМАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЗ НАБЛЮДАТЕЛЬНЫХ ДАННЫХ

Введение

За последние полторы декады появился целый ряд убедительных свидетельств в пользу того, что современная Вселенная не просто расширяется, а расширяется с ускорением (обзор наблюдательных данных и теоретических моделей ускоренного расширения см., например, в работах [1, 2]). Такое ускорение не может быть объяснено присутствием во Вселенной только обычного вещества, из которого состоят видимые звезды и галактики. Поэтому необходимо предположить, что также существует некоторая невидимая форма материи, называемая темной энергией, которая ответственна за наблюдаемое ускоренное расширение.

Хотя истинная природа темной энергии сейчас неизвестна, ее ключевые свойства, обеспечивающие ускорение, понятны. А именно, темная энергия должна нарушать различные условия энергодоминантности. С точки зрения космологии наибольший интерес представляет нарушение сильного условия энергодоминантности, $(\varepsilon + 3p) \geq 0$, или слабого/светового, $(\varepsilon + p) \geq 0$ (здесь ε и p есть эффективные плотность энергии и давление вещества, заполняющего Вселенную). Тогда, если такая форма материи действительно существует во Вселеннной, то может иметь место ее ускоренное расширение.

В настоящее время предлагаются несколько путей нарушения указанных условий энергодоминантности. В простейшем варианте это может быть эйнштейновская космологическая постоянная. Тогда, учитывая, что помимо обычной материи во Вселенной также присутствует и темная материя, описание эволюции Вселенной может быть выполнено с хорошей точностью в рамках так называемой ΛCDM модели. Эта модель, кроме эйнштейновского Λ-члена, также включает темную материю в форме жидкости с нулевым давлением (пыли).

Но хорошо известная "проблема космологической постоянной", присущая этой модели, заставляет искать альтернативные пути описания ускоренного расширения Вселенной. Возможно, одним из наиболее перспективных подходов в определении природы происхождения темной энергии является рассмотрение теорий, включающих различные фундаментальные поля [1, 2]. Также рассматриваются возможности привлечения модифицированных (неэйнштейновских) теорий гравитации [3, 4] или моделей с дополнительными пространственными размерностями [5, 6]. Все эти теории допускают возможность нарушения отмеченных выше энергетических условий, что, в свою очередь, позволяет описывать эволюцию Вселенной таким образом, чтобы удовлетворить текущим астрономическим наблюдениям и лабораторным экспериментам.

Одним из подходов является рассмотрение так называемых хамелеоновых скалярных полей. Последние связаны с обычным веществом и однородно распределены по пространству в масштабах от Солнечной системы до космологических [7-9]. Одной из основных отличительных особенностей этих моделей является наличие прямого (неминимального) взаимодействия между обычным веществом и скалярным полем. Это приводит, например, к то тому, что скалярное поле меняет свою массу в зависимости от локального распределения фонового вещества. С другой стороны, можно ожидать, что свойства звезд, состоящих из обычного вещества, которое может напрямую взаимодействовать со скалярным полем, будут меняться в присутствии такой неминимальной связи. Действительно, в работах [10-12] было показано, что под влиянием хамелеонового поля имеют место существенные изменения структуры компактных объектов (политропных звезд).

При рассмотрении различных моделей в рамках хамелеоновой парадигмы важный момент состоит в выборе функций неминимальной связи $f(\varphi)$ и потенциальной энергии $V(\varphi)$ хамелеонового скалярного поля φ, используемого в теории. В оригинальных работах [7-9] выбор функции $f(\varphi)$ основывается на рассмотрении эффективных действий из теории струн и супергравитации в низкоэнергетическом пределе. В свою очередь $V(\varphi)$ выбирается так, чтобы обеспечить требуемые свойства модели. С одной стороны, это позволяет описывать текущее ускоренное расширение Вселенной, а с другой – такая модель удовлетворяет различным космологическим и лабораторным ограничениям (см. обзор [13]).

Эти космологические модели были в дальнейшем развиты в работах [14-16], в которых авторы выбирали обобщенные выражения для неминимальной связи между скалярным полем и веществом в форме $f(\varphi)L_m$, где L_m есть лагранжиан обычного вещества. При рассмотрении эволюции Вселенной они использовали два различных подхода: в работе [14] функции $V(\varphi)$ и $f(\varphi)$ выбирались произвольно, а входящие в них параметры подбирались так, чтобы удовлетворить имеющимся наблюдательным данным. Другой подход был применен в [15, 16], где авторы изначально выбирали некоторую специальную форму космологической эволюции и находили функции $V(\varphi)$ и $f(\varphi)$, соответствующие такой эволюции.

Целью настоящей статьи является определение формы функции $f(\varphi)$ исходя из требования удовлетворения данным текущих астрономических наблюдений. При этом мы воспользуемся подходом работы [17], обобщив полученные там результаты на случай, когда величины давления обычного вещества могут лежать в широком диапазоне, вплоть до давлений, сравнимых с плотностью энергии.

Общее выражение для f

Как указано во Введении, здесь выбор функции неминимального взаимодействия $f(\varphi)$ будет осуществляться путем рассмотрения космологической эволюции Вселенной. При этом мы будем работать в рамках хамелеоновой парадигмы, предложенной в работе [14], следуя аналогичной процедуре из [17].

Мы стартуем с лагранжиана

$$L = -\frac{c^4}{16\pi G} R + \frac{\Delta}{2} \partial_\mu \varphi \, \partial^\mu \varphi - V(\varphi) + f(\varphi) L_m. \tag{1}$$

Здесь φ есть действительное скалярное поле с потенциальной энергией $V(\varphi)$; $\Delta = \pm 1$ соответствует обычному или фантомному скалярному полю; L_m есть лагранжиан обычного вещества (идеальная жидкость). Случай $f = 1$ соответствует отсутствию прямой связи между жидкостью и скалярным полем, но даже в этом случае оба источника связаны посредством гравитации.

Прежде чем перейти к получению функции $f(\varphi)$, скажем несколько слов о выборе лагранжиана L_m. Он может быть выбран несколькими способами (см. возможные варианты в работе [18]). Здесь мы берем $L_m = p$. Такой выбор используется, например, при рассмотрении систем с неминимальной связью между идеальной жидкостью и скалярной кривизной

[18, 19]. Интересной особенностью использования такой формы L_m является отсутствие дополнительных сил в уравнении движения по сравнению со случаем обычной общей теории относительности. С другой стороны, при моделировании хамелеоновых звезд в работах [10-12] было показано, что уравнение Толмана-Оппенгеймера-Волкова также не содержит слагаемых, соответствующих дополнительным силам, связанным с неминимальным взаимодействием между жидкостью и скалярным полем. Однако можно показать, что в этом случае уравнения движения уже будут содержать дополнительные силовые слагаемые. В принципе, это может приводить, например, к негеодезическому движению тестовых частиц в заданном гравитационном поле [17]. Тогда необходимо выполнять дополнительные исследования для выяснения вопроса о совместимости такого типа неминимального взаимодействия с лабораторными экспериментами (например, с экспериментами типа Этвеша).

Полагая $L_m = p$, рассмотрим плоскую космологическую модель с метрикой

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) dl^2, \qquad (2)$$

где $a(t)$ есть масштабный фактор. Используя общий лагранжиан (1), соответствующий тензор энергии-импульса есть (детали получения см. в приложении работы [10])

$$T_i^k = f\left[(\varepsilon + p)u_i u^k - \delta_i^k p\right] + \Delta\ \partial_i\varphi\, \partial^k\varphi - \delta_i^k \left[\frac{\Delta}{2}\, \partial_\mu\varphi\, \partial^\mu\varphi - V(\varphi)\right], \qquad (3)$$

где ε и p есть плотность энергии и давление жидкости, u_i – ее 4-скорость. Используя метрику (2) и тензор энергии-импульса (3), можно найти следующие $\binom{0}{0}$ и $\binom{1}{1}$ компоненты уравнений Эйнштейна:

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\left[f\varepsilon + \frac{\Delta}{2c^2}\,\dot\varphi^2 + V(\varphi)\right], \qquad (4)$$

$$2\frac{\ddot a}{a} + \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{c^2}\left[-fp - \frac{\Delta}{2c^2}\,\dot\varphi^2 + V(\varphi)\right]. \qquad (5)$$

Здесь точка означает дифференцирование по космологическому времени t. Уравнение на скалярное поле φ следует из лагранжиана (1)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right] = \Delta\left(-\frac{dV}{d\varphi} + L_m\frac{df}{d\varphi}\right) \qquad (6)$$

и дает в метрике (2):

$$\ddot\varphi + 3\frac{\dot a}{a}\dot\varphi = \Delta\, c^2\left(-\frac{dV}{d\varphi} + p\frac{df}{d\varphi}\right). \qquad (7)$$

Еще одно уравнение может быть найдено из закона сохранения энергии-импульса, $T^k_{i;k} = 0$. Беря $i = 0$ компоненту этого уравнения, имеем:

$$\frac{d(f\varepsilon)}{dt} + 3\frac{\dot a}{a}f(\varepsilon + p) + p\frac{df}{dt} = 0. \qquad (8)$$

Учитывая, что ε и p связаны некоторым уравнением состояния, имеем три неизвестные функции a, φ, ε и четыре уравнения (4), (5), (7) и (8). Из этих уравнений только три независимы. Для наших целей ниже будем пользоваться уравнениями (4), (5) и (8).

Теперь необходимо выбрать уравнение состояния, описывающее вещество Вселенной. В этой статье мы будем пользоваться обычным линейным соотношением между давлением и плотностью энергии в форме

$$p = w\varepsilon, \qquad (9)$$

где $w = \text{const}$ – параметр уравнения состояния. В настоящее время наиболее популярной гипотезой при моделировании вещества Вселенной является предположение, что его уравнение состояния соответствует холодной пылевой материи [1,2]. Такая материя имеет нулевое ($w = 0$) или очень маленькое давление, $w \ll 1$ (см., например, работу [20]). С другой стороны, при моделировании темной материи скалярным полем возможно, что w будет существенно отличаться от нуля [21]. Исходя из этого, здесь мы не будем изначально полагать $w \approx 0$, оставляя его произвольным.

Используя (9) в (8), можно найти

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_{0m}}{f^{(1+w)}a^{3(1+w)}}, \qquad (10)$$

где ε_{0m} есть константа интегрирования. В пределе $f \to 1$, т.е. в отсутствии неминимальной связи, это выражение сводится к обычной зависимости плотности пылевой материи как функции масштабного фактора.

Для последующих вычислений удобно ввести новые безразмерные переменные

$$\tau = H_0 t, \phi(\tau) = \left(\frac{8\pi G}{3c^4}\right)^{1/2} \varphi(t), \qquad (11)$$

где H_0 есть текущее значение параметра Хаббла. Используя эти переменные и учитывая уравнение состояния (9), система уравнений (4) и (5) принимает вид

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{\Omega_m}{f^w a^{3(1+w)}} + \frac{\Delta}{2}\phi'^2 + \Omega_m \tilde{V}, \qquad (12)$$

$$2\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = 3\left[-\frac{w\Omega_m}{f^w a^{3(1+w)}} - \frac{\Delta}{2}\phi'^2 + \Omega_m \tilde{V}\right]. \qquad (13)$$

Здесь штрих означает производную по безразмерному времени τ; $\Omega_m = 8\pi G\rho_{0m}/(3H_0^2)$, $\tilde{V} = V/\varepsilon_{0m} \equiv V/(\rho_{0m}c^2)$, где индекс 0 означает текущие значения плотности энергии (массы).

Комбинируя уравнения (12) и (13), можно получить функцию f в виде

$$f^w = \frac{3(1-w)\Omega_m}{2[a''/a + 2(a'/a)^2 - 3\Omega_m \tilde{V}]a^{3(1+w)}}. \qquad (14)$$

Тогда, если a и $\tilde{V}$ есть известные функции времени τ, можно найти соответствующую зависимость $f = f(\tau)$.

Для нахождения выражения на f мы будем исходить из данных космологических наблюдений. При этом удобно переписать полученное выше выражение через безразмерный параметр Хаббла h и красное смещение z, определяемых как:

$$h \equiv \frac{H}{H_0} = \frac{1}{H_0}\frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \frac{a'}{a}, z = \frac{1}{a} - 1.$$

Учитывая это, найдем:

$$\frac{a''}{a} = -(z+1)h\frac{dh}{dz} + h^2.$$

Подставляя это в (14), имеем:

$$f^w = \frac{3(1-w)\Omega_m(z+1)^{3(1+w)}}{2[-(z+1)h\, dh/dz + 3h^2 - 3\Omega_m \tilde{V}]}. \qquad (15)$$

Зная h как функцию z, можно найти $f = f(z)$. Тогда для получения функции $f = f(\phi)$ необходимо найти зависимость $\phi = \phi(z)$. Воспользуемся для этого уравнением (12), из которого можно найти:

$$\phi'^2 = 2\Delta\left[h^2 - \frac{\Omega_m(z+1)^{3(1+w)}}{f^w} - \Omega_m \tilde{V}\right].$$

Подставляя сюда (15) и переходя к дифференцированию по z, имеем:

$$(1+z)^2\left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2 = 2\Delta\left[\left(1 - \frac{2}{1-w}\right)\left(1 - \frac{\Omega_m \tilde{V}}{h^2}\right) + \frac{2}{3(1-w)}\frac{z+1}{h}\frac{dh}{dz}\right]. \qquad (16)$$

Решив это уравнение, можно найти ϕ как функцию от z.

Частное выражение на f в случае ΛCDM модели

Продемонстрируем теперь, как получить выражение для f в частном случае $\tilde{V} = 0$ (безмассовое скалярное поле) и при выборе анзаца для параметра Хаббла h в виде хорошо известной ΛCDM модели [1]:

$$h(z)^2 = \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda, \qquad (17)$$

где $\Omega_\Lambda = c^2\Lambda/3H_0^2$ соответствует безразмерной плотности темной энергии. Для плоской космологической модели, рассматриваемой здесь, $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$.

В настоящую эпоху $z \approx 0$. Поэтому разложим выражение (17) в ряд Тэйлора в окрестности $z \approx 0$:

$$h \approx 1 + \frac{3}{2}\,\Omega_m z.$$

Подставляя это в (16), можно получить

$$\left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2 = C(A + Bz) \qquad (18)$$

с $A = \Omega_m - (1 + w)$, $B = 2(1 + w) - \Omega_m(1 + 3\Omega_m)$, $C = 2\Delta/(1 - w)$. Его интегрирование дает

$$\phi = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{C}}{B}(A + Bz)^{3/2} + \phi_c. \qquad (19)$$

Константа интегрирования ϕ_c фиксирует величину скалярного поля. Используя это выражение для ϕ, можно найти зависимость $z = z(\phi)$ в следующем виде:

$$z = \frac{1}{B}\left[\left(\frac{3}{2}\frac{B}{\sqrt{C}}\right)^{2/3}(\phi - \phi_c)^{2/3} - A\right]. \qquad (20)$$

Это выражение может быть использовано в (15) для получения функции f. В рассматриваемом приближении $z \ll 1$ из (15) имеем:

$$f^w = \frac{(1-w)\Omega_m}{2-\Omega_m}\left\{1 + \left[3(1 + w) - \frac{5\Omega_m}{2-\Omega_m}\right]z\right\}. \qquad (21)$$

Если предположить, что для вещества во Вселенной $0 \le w \le 1$ и $0.2 \le \Omega_m \le 0.4$ (как это обычно предполагается при описании вещества, заполняющего Вселенную), эти значения параметров всегда дают $A < 0$ и $B > 0$. В этом случае, учитывая, что $z \ll 1$, выражение в скобках с правой стороны (18) отрицательно. Тогда для обеспечения положительности $(d\phi/dz)^2$ необходимо положить $C < 0$, а соответственно Δ должна равняться -1 (духовое поле). Тогда выражение (20) может быть переписано как

$$z = -\frac{1}{B}\left[\left(\frac{3}{2}\frac{B}{\sqrt{|C|}}\right)^{2/3}(\phi - \phi_c)^{2/3} + A\right]. \qquad (22)$$

Используя это выражение в (21), имеем параметрическую зависимость $f = f(\phi)$ для рассматриваемого ΛCDM анзаца.

Заключение

Исходя из предположения, что космологическое скалярное поле φ, однородно заполняющее Вселенную, может неминимально взаимодействовать с веществом (обычным или темным), мы нашли соответствующую функцию взаимодействия $f(\varphi)$. Получение последней основывается на использовании космологических наблюдательных данных. Для этого скорость расширения Вселенной, задаваемая параметром Хаббла h, аппроксимировалась как функция от красного смешения z в форме известной ΛCDM модели (17). Тогда в случае безмассового скалярного поля и в рамках приближения $z \ll 1$ (современная эпоха) удалось найти аналитическое выражение на функцию неминимального взаимодействия в виде (21) и (22).

Полученные выражения на неминимальное взаимодействие могут быть использованы как при описании эволюции Вселенной в космологических масштабах, так и при рассмотрении моделей компактных астрофизических объектов, состоящих из хамелеоновых полей и обычного/темного вещества.

Благодарности

В.Ф. благодарен за поддержку работы в виде гранта 2074/ГФ4 Министерства образования и науки Республики Казахстан.

References

1 Sahni V. Dark matter and dark energy // Lect. Notes Phys. – 2004. – V. 653. – P.141-180.

2 Copeland E. J., Sami M. and Tsujikawa S. Dynamics of dark energy // Int. J. Mod. Phys. – 2006. – V. D15. – P.1753-1936.

3 De Felice A. and Tsujikawa S. f(R) theories // Living Rev. Rel. – 2010. –V. 13. –P. 3-127.

4 Nojiri S. 'i. and Odintsov S. D. Unified cosmic history in modified gravity: from F(R) theory to Lorentz non-invariant models // Phys. Rept. – 2011. – V. 505. – P. 59-144.

5 Maartens R. Brane world gravity // Living Rev. Rel. – 2004. – V. 7. – P. 7-61.
6 Dzhunushaliev V., Folomeev V. and Minamitsuji M. Thick brane solutions // Rept. Prog. Phys. – 2010. – V. 73:066901 – 29 p.
7 Khoury J. and Weltman A. Chameleon fields: Awaiting surprises for tests of gravity in space // Phys. Rev. Lett. – 2004. – V. 93:171104. – 4 p.
8 Khoury J. and Weltman A. Chameleon cosmology // Phys. Rev. – 2004. – V. D69:044026. – 15p.
9 Brax P., van de Bruck C., Davis A. – C., Khoury J., and Weltman A. Detecting dark energy in orbit – The Cosmological chameleon // Phys. Rev. – 2004. – V. D70:123518. – 18 p.
10 Dzhunushaliev V., Folomeev V. and Singleton D. Chameleon stars // Phys. Rev. – 2011. – V. D84:084025. – 25 p.
11 Folomeev V. Nonrelativistic isothermal fluid in the presence of a chameleon scalar field: static and collapsing configurations // Phys. Rev. – 2012. – V. D85:024008. – 13 p.
12 Folomeev V. and Singleton D. Relativistic polytropic spheres embedded in a chameleon scalar field // Phys. Rev. -2012. – V. D85:064045. – 13 p.
13 Mota D.F. and Shaw D.J. Evading Equivalence Principle Violations, Cosmological and other Experimental Constraints in Scalar Field Theories with a Strong Coupling to Matter // Phys. Rev. – 2007. – V. D75:063501. – 13 p.
14 Farajollahi H. and Salehi A. Cosmic Dynamics in the Chameleon Cosmology // Int. J. Mod. Phys. – 2010. – V. D19. – P.621-633.
15 Cannata F.and Kamenshchik A. Y. Chameleon Cosmology Model Describing the Phantom Divide Line Crossing // Int. J. Mod. Phys. – 2011. – V. D20. – P.121-131.
16 Chattopadhyay S. and Debnath U. Emergent universe in chameleon, f(R) and f(T) gravity theories // Int. J. Mod. Phys. – 2011. – V. D20. – P.1135-1149.
17 Folomeev V. Chameleon stars supported by a cosmological scalar field // Phys. Rev. – 2012. – V. D86:063008. – 11 p.
18 Bertolami O., Lobo F. S. N. and Paramos J. Non-minimum coupling of perfect fluids to curvature // Phys. Rev. – 2008. – V. D78:064036. – 6 p.
19 Sotiriou T. P. and Faraoni V. Modified gravity with R-matter couplings and (non-)geodesic motion // Class. Quant. Grav. – 2008. – V. 25: 205002. 12 p.
20 Muller C. M. Cosmological bounds on the equation of state of dark matter // Phys. Rev. – 2005. – V. D71:047302. – 4 p.
21 Bharadwaj S. and Kar S. Modeling galaxy halos using dark matter with pressure // Phys. Rev. – 2003. – V. D68:023516. – 13 p.