

Хизирова М.А., Бисариева Ж.Б.,  
Искакова С.К.

**Исследование  
электростатических полей  
с помощью функций Бесселя**

Электронно- и ионно-лучевые приборы широко используются в современной науке и технике. Промышленные и бытовые телевизоры, электронные микроскопы, ускорители заряженных частиц, масс-спектрометры различных модификаций, электронно-оптические преобразователи – вот далеко не полный перечень областей применения пучков заряженных частиц. Эти пучки обладают уникальными технологическими возможностями, и область их применения в последнее время интенсивно расширяется. Острорасфокусированные пучки заряженных частиц широко используются в медицине, интенсивно изучается возможность применения пучков ускоренных ионов для создания реактивной тяги, что открывает возможность создания космических аппаратов, способных летать со скоростями, близкими к скорости света. Таким образом, основной задачей электронной оптики является получение с помощью пучков заряженных частиц под воздействием электрических и магнитных полей высококачественных электронных или ионных изображений. Эта проблема рассматривается и исследуется теорией фокусировки заряженных частиц. В данной статье с помощью математического пакета MathCad на примере электростатического осесимметричного зеркала получено осевое изменение функции Бессель первого рода для распределения электростатического потенциала вдоль оптической оси.

**Ключевые слова:** электронная оптика, функции Бесселя, осесимметричное зеркало.

Khizirova M.A., Bisariyeva ZH.B.,  
Iskakova S.K.

**Study of electrostatic fields using  
Bessel functions**

Electron- and ion-beam tubes are widely used in modern science and technology. Industrial and household TV, electron microscopes, particle accelerators, mass spectrometers of various modifications, electro-optical converters – this is not a complete list of applications of charged particle beams. These beams have unique technological capabilities and their field of application in recent years expanded rapidly. Tightly focused beams of charged particles are widely used in medicine, intensively studied the possibility of using accelerated ion beams to create a jet thrust, allowing the creation of spacecraft capable of flying at speeds close to the speed of light. Thus, the main objective is to obtain the electron optics using beams of charged particles under the influence of electric and magnetic fields of high electron or ion images. This problem is considered and studied the theory of focusing of charged particles.

**Key words:** electron optics, Bessel functions, axisymmetric mirror.

Қызырова М.А., Бисариева Ж.Б.,  
Исқақова С.К.

**Бессель функциялары арқылы  
электростатикалық  
өрісті зерттеу**

Электронды және ионды-сәулелік құрылғылар қазіргі заманғы ғылым мен техникада кеңінен қолданылуда. Өндірістік және тұрмыстық теледидарлар, электронды микроскоптар, зарядталған бөлшектердің үдеткіштері, масс-спектрометрлер, электронды-оптикалық түрлендіргіштер – бұл зарядталған бөлшектер шоғырының қолданылу аймақтарының бір бөліктері. Бұл шоғырлар ерекше технологиялық мүмкіндіктерге ие және олардың қолданылу аймақтары соңғы уақытта кеңейе түсуде. Күшті фокусталған зарядталған бөлшектер шоғыры медицинада кеңінен қолданылады. Реактивті күштерді тудыру үшін үдетілген иондар шоғырының қолданылу мүмкіндігі зерттелуде. Бұл жарық жылдамдығына жуық жылдамдықпен қозғалатын космостық аппараттар жасауға мүмкіндік ашады. Сондықтан, электрондық оптиканың негізгі міндеті зарядталған бөлшектер шоғыры көмегімен электрлік және магниттік өріс әсерінен жоғары сапалы электрондық немесе иондық кескін алу болып табылады. Бұл мақалада зарядталған бөлшектерді фокустау теориясында қарастырылады және зерттеледі.

**Түйін сөздер:** электрондық оптика, Бессель функциясы, осесимметриялық айна.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

### Введение

Настоящая работа посвящена исследованию распределения электростатических полей с помощью математического пакета MathCad для электростатического осесимметричного зеркала и сравнительному анализу по точным формулам.

В электронно-оптических устройствах широко применяются электрические и магнитные поля, обладающие симметрией вращения относительно оптической оси системы. Электронные линзы и электронные зеркала с такими полями называются осесимметричными. Электрические поля с симметрией вращения создаются электродами в виде цилиндров, чашечек, диафрагм с круглыми отверстиями и т.п. Для получения осесимметричных магнитных полей используют электромагниты (иногда постоянные магниты) с полюсами в форме тел вращения или тороидальные катушки с намоткой из изолированной проволоки, по которой пропускается электрический ток. Осесимметричные зеркала создают правильные электронно-оптические изображения, если заряженные частицы движутся достаточно близко к оси симметрии поля, а их начальные скорости мало отличаются друг от друга. Если эти условия не выполняются, погрешности изображения становятся весьма значительными. Когда предмет и изображение лежат за пределами поля, осесимметричные электронные линзы – всегда собирающие. В электростатических осесимметричных электронных линзах, как и в светооптических линзах со сферическими поверхностями, изображение может быть только прямым или перевёрнутым, в магнитных электронных линзах – оно дополнительно перевёрнуто на некоторый угол. Электронно-оптические свойства поля с симметрией вращения определяются положением его кардинальных точек, аналогичных кардинальным точкам осесимметричных светооптических изображающих систем: двух фокусов, двух главных точек и двух узловых точек. Построение изображения производится по правилам световой геометрической оптики.

Существуют и другие типы электронных линз и зеркал, поля которых обладают различными видами симметрии. Они формируют изображения точечных объектов в виде отрезков линий, однако иногда способны осуществлять и стигматическую фокусировку (точка в точку). Так называемые цилиндрические электростатические и магнитные линзы и зеркала создают линейные изображения точечных предметов. Поля в таких электронных линзах "двумерны" (их напряжённости описываются функциями только двух декартовых координат) и симметричны относительно некоторой средней плоскости, вблизи которой движутся заряженные частицы.

*Свойства электростатических зеркал*

Как известно, электронно-оптическая теория фокусировки опирается на глубокую аналогию между движениями заряженных частиц в электромагнитных полях и распространением света в прозрачных средах, в частности на известную теорему Липиха [1], в соответствии с которой изучение пространственной фокусировки сводится к исследованию траекторий в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Вместе с тем выяснилось, что не все электромагнитные поля удовлетворяют условиям теоремы Липиха. Для линзовых систем с кривой оптической осью Стэрроком [2] были установлены условия ортогональности электромагнитных полей, для которых возможно построение электронно-оптической теории фокусировки, подобной теории светооптических линз. Позднее эти условия были распространены и на случай эмиссионно-зеркальных электронно-оптических систем.

Разрешение ЭОС, подвергнутой коррекции, ограничено осевыми aberrациями высших порядков. Это дает возможность создать систему "линза-зеркало", полностью свободную от сферической aberrации. Такое зеркало можно рассматривать как линзово-зеркальную систему, так как знак коэффициента сферической aberrации электростатического зеркала противоположен знаку коэффициента сферической aberrации электростатической линзы. В рассматриваемой системе "линза-зеркало" роль линзы играет зазор между первым и вторым электродами, а роль зеркала – зазор между вторым и третьим электродами.

Виды электрического и магнитного полей в приосевой области ЭОС в тех случаях, когда эта область свободна от объемных зарядов и токов, представляются в виде

$$\varphi(X, Y, z) = \sum_{m+n=0}^{\infty} w_{mn}(z) X^m Y^n, \quad (1)$$

$$A_x(X, Y, z) = \sum_{m+n=0}^{\infty} \Omega_{mn}(z) X^m Y^n, \quad (2)$$

$$A_y(X, Y, z) = \sum_{m+n=0}^{\infty} W_{mn}(z) X^m Y^n. \quad (3)$$

Тогда распределение электростатического поля будет описываться следующим выражением

$$\begin{aligned} \varphi(X, Y, z) = & \Phi - \frac{1}{4} \Phi''(X^2 + Y^2) + Q_0 \left[ \frac{1}{2} \cos 2\psi (X^2 - Y^2) + \sin 2\psi XY \right] + \\ & \frac{1}{3} K_0 \left[ \cos 3\psi (X^3 - 3XY^2) - \sin 3\psi (Y^3 - 3X^2Y) \right] + \\ & Q_0 \left[ \frac{1}{4} \cos 4\psi (X^4 + Y^4 - 6X^2Y^2) + \sin 4\psi (X^3Y - XY^3) \right] + \frac{1}{64} \Phi^{(4)} \times \\ & (X^2 + Y^2)^2 - \frac{1}{24} (Q_0'' \cos 2\psi - 4\psi' Q_0' \sin 2\psi - 4\psi'^2 Q_0 \cos 2\psi) (X^4 - Y^4) - \\ & \frac{1}{12} (Q_0'' \sin 2\psi + 4\psi' Q_0' \cos 2\psi + 2\psi'' Q_0 \cos 2\psi - 4\psi'^2 Q_0 \sin 2\psi) \times \\ & (X^3Y - Y^3X) + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения траекторий в цилиндрической системе координат принимают следующий вид:

$$\Phi r'' + \frac{1}{2} \Phi' r' + \frac{1}{4} \Phi'' r = K, \quad (5)$$

$$2\Phi \eta' - \Phi' \eta = l, \quad (6)$$

где

$$K = \left( \frac{1}{2r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{4} \Phi'' \right) r,$$

$$l = \varphi + \varepsilon - \eta \Phi' - \Phi(1 + r'^2).$$

Здесь и далее  $\Phi = \Phi(\zeta)$ , а штрихи обозначают дифференцирование по  $\zeta$ .

Для решения системы уравнений (5) и (6) найдем сначала величину  $U$ , определяющую  $r$  в первом приближении, предположив правую часть равенства (5) равным нулю:

$$\Phi U'' + \frac{1}{2} \Phi' U' + \frac{1}{4} \Phi'' U = 0. \quad (7)$$

Это уравнение имеет особую точку при  $\zeta = z_u$ , определяемую равенством  $\Phi(z_u) = 0$ . Эта точка является полюсом первого порядка для коэффициентов при  $U'$  и  $U$ , так как предполагается, что в окрестности поворота электронных траекторий напряженность электрического поля отлична от нуля. Для данного уравнения осевое распределение электростатического потенциала для рассматриваемого зеркала имеет вид [3]

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} \left[ (V_1 + V_3) + \sum_{i=1}^2 (V_{i+1} - V_i) U_i \right], \quad (8)$$

где

$$U_i = \text{sign}(z - z_i) \left[ 1 - \frac{\exp\left[-2\alpha_k(z - z_i)/d\right]}{\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha_k^2}{\alpha_m^2}\right)_{s \neq m}} \right]. \quad (9)$$

Здесь  $V_1, V_2$  и  $V_3$  – потенциалы на электродах,  $z_i$  – координата середины  $i$ -го зазора между электродами,  $\alpha_k, \alpha_m$  – положительные корни функции Бесселя первого рода нулевого порядка.

Расчет рассматриваемого зеркала производился следующим образом. Определялись первоначальные значения функции Бесселя и по формулам (8) и (9). Осевое распределение определялось согласно формуле (7). Тогда полученное осевое распределение электростатического потенциала будет иметь вид, представленный на рисунке 1, которое полностью совпадает с теоретическими данными.

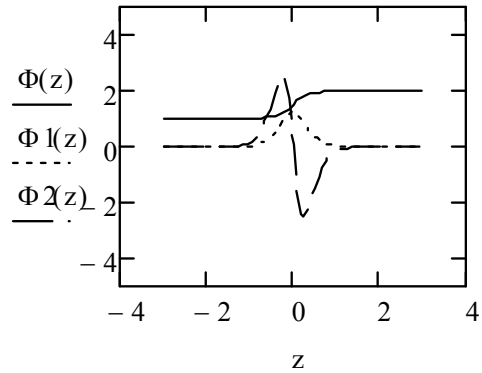


Рисунок 1 – Осевое распределение потенциала, определенное с помощью функции Бесселя

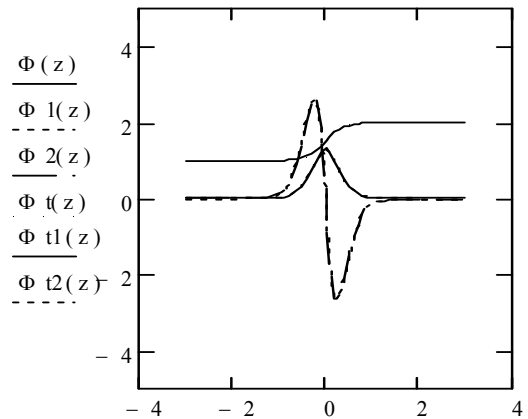


Рисунок 2 – Осевое распределения потенциала, определенные с помощью функций Бесселя и точной формулой

На рис.1 обозначены, согласно формуле (7),  $\Phi$  – распределение потенциала на оси,  $\Phi_1$  – первая производная по оптической оси поля,  $\Phi_2$  – вторая производная по оптической оси поля. Если данное распределение сравнить с точной формулой, описанной в работе [4] для распределения электростатического поля, то график также примет аналогичный вид (рисунки 2).

Расчет рассматриваемого зеркала производился с помощью математического расчетного

пакета MathCad на основе определения электростатического поля.

### Заключение

Исследованные результаты распределения поля могут быть использованы для определения кардинальных элементов, которые в дальнейшем могут быть использованы в качестве объектива электронного микроскопа просвечивающего типа.

### References

- 1 Kel'man V.M., Yavor S.YA. Elektronnaya optika – L.: Nauka, 1968 – 488s.
- 2 Sterrok A. Statischeckaya i dinamicheskaya elektronnaya optika. – M., 1958. – 485 c.
- 3 Bimurzayev S.B., Serikbayeva G.K., Khizirova M.A. Trekhelektroodnoye elektrostatischeckoye osesimmetrichnoye zerkalo s ustranimoy sfericheskoj aberratsiyey // Vestnik KazNU, seriya fizicheskaya. – 2000, №1(8). – S. 126.
- 4 Daumenov T.D., Yakushev Ye.M., Khizirova M.A. Osobennosti fokusirovki puchkov zaryazhennykh chastits pri nalichii polej s periodicheskoj modulyatsiyey // Tezisy dokladov 4-oy Mezhdunarodnoy konferentsii «Yadernaya i radiatsionnaya fizika». – Almaty. – 2004. – S. 259-264.