Бошқаев Қ., Тоқтарбай С.,
Жәми Б., Таукенова Ә.,
Сүлейманова Ш.,
Қалымова Ж., Абуталіп М.

Баяу айналатын жұлдыздардың тепе-теңдік конфигурациялары

Жұмыста Ньютонның классикалық физикасы аясында баяу айналатын жұлдыздардың гидростатикалық тепе-теңдік мәселесі Хартл формализмі негізінде қарастырылды. Барлық есептеулер жұлдыздың бұрыштық жылдамдығының екінші реттік дәрежесіне дейінгі дәлдікпен орындалды. Тепе-теңдік күйдегі баяу айналатын жұлдыздардың құрылым теңдеулері қорытылып алынды, яғни жұлдыздың массасы, радиусы, инерция моменті, эллипстілігі, эксцентриситеті және квадрупольдық моменті - орталық тығыздық пен айналу периодының функциясы ретінде анықталды. Алынған нәтижелер жұлдыздар мен ғаламшарларда айналудан пайда болатын барлық өзгерістерді ескеруге мүмкіндік береді. Атап айтқанда: баяу айналатын жұлдыздың пішіні айналмайтын жұлдыз іспетті сфералық дене емес айналу өсіне қатысты екі үлкен жарты өстері бір-біріне тең айналу эллипсоиды болады; айналу эллипсоидының инерция моменті айналмайтын дененікінен өзгеше болады; гравитациялық өріс потенциалы тек қана радиал координаттың функциясы ғана емес, сонымен қатар полярлық координаттың функциясы болады.

Түйін сөздер: Баяу айналатын жұлдыздар, құрылым теңдеуі, тепе-теңдік күй.

Boshkayev K., Toktarbay S.,
Zhami B., Taukenova A.,
Suleymanova Sh., Kalymova Zh.,
Abutalip M.

Equilibrium configurations of slowly rotating stars

In this work we consider equilibrium configurations of slowly rotating classical stars on the basis of Hartle's formalism. All calculations have been performed up to second order terms in the angular velocity of a star. Equations of structure have been derived for configurations in equilibrium in order to find the mass, radius, moment of inertia, ellipticity, eccentricity and quadrupole moment as a function of the central density and the rotation period. Obtained results allow to account for all changes appeared as a result of rotation in star and planets. It was shown that unlike non-rotating spherical stars, the shape of slowly rotating stars will be a rotating ellipsoid with equal major semi-axes relative to the rotation axis; the moment of inertia of the rotating ellipsoid is different from non-rotating object; the potential of the gravitational field is not only the function of the radial coordinate but also the function of the polar coordinate.

Key words: Slowly rotating stars, equation of structure, equilibrium state.

Бошкаев К., Токтарбай С.,
Жами Б., Таукенова А.,
Сулейманова Ш.,
Калымова Ж., Абуталип М.

Равновесные конфигурации медленно вращающихся звезд

В работе рассмотрены равновесные конфигурации медленно вращающихся классических звезд на основе формализма Хартла. Все расчеты были выполнены с точностью до квадратичных членов по угловой скорости. Для равновесной конфигурации были вычислены масса, радиус, момент инерции, эллиптичность, эксцентриситет и квадрупольный момент как функции от центральной плотности и периода вращения. Полученные результаты позволяют учитывать все изменения в звездах и планетах, возникающих в результате их вращения. Было показано, что в отличие от невращающейся сферической звезды, форма медленно вращающейся звезды будет эллипсоидом вращения с равными относительно оси вращения большими полуосями; момент инерции вращающегося эллипсоида также отличается от невращающегося случая; потенциал гравитационного поля является не только функцией радиальной координаты, но также и полярной координаты.

Ключевые слова: Медленно вращающиеся звезды, уравнение структуры, равновесное состояние.

ӘОЖ 52 : 531.51; 52 : 530.12

Бошқаев Қ., Тоқтарбай С., Жәми Б., Таукенова Ә., Сүлейманова Ш., Қалымова Ж., Абуталіп М.

Әл-Фараби ат. Қазақ ұлттық университеті, Эксперименттік және теориялық физика ғылыми-зерттеу институты, Қазақстан Республикасы, Алматы қ.

БАЯУ АЙНАЛАТЫН ЖҰЛДЫЗДАРДЫҢ ТЕПЕ-ТЕҢДІК КОНФИГУРАЦИЯЛАРЫ

Кіріспе

Кез келген аспан денесінің өз өсінен айналуы оның құрылымында және сыртқы гравитациялық өрісінде көптеген физикалық өзгерістер туғызуы мүмкін. Мысалы, айналу бас тізбектегі жұлдыздар, ақ ергежейлі жұлдыздар, нейтрондық жұлдыздар мен ғаламшарлар сияқты аспан денелерінде елеулі рөл атқарады. Ол аспан денелерінің құрылымын ғана өзгертіп қоймай, жұлдыздың ішінде жүріп жатқан үдерістерге де әсер етеді. Дәлірек айтқанда, белгілі бір жағдайларда термоядролық реакциялардың өту жылдамдығын өзгертуі мүмкін. Мұндай өзгерістер барлық жұлдыздардың өмір сүру уақытын белгілейтін маңызды фактор болып табылады [1-3].

Мәселен, айналмайтын ақ ергежейлі жұлдыздардың максимум массасы Чандрасекар шегіне $1.44M_{\odot}$ тең екені белгілі [4]. Бұл шекке сәйкес келетін тығыздық пен қысым ақ ергежейлі жұлдыздың даму жолын белгілейді. Егер ақ ергежейлі жұлдыз айналатын болса, онда центрден тепкіш күштің әсерінен қарастырып отырған орталық тығыздық пен қысымның екеуі де азаяды [5-6]. Жұлдыздың орталық тығыздығы мен орталық қысымын айналғаннан кейін бастапқы қалпына келтіру үшін жұлдызға сырттан қосымша масса беру керек. Осыған орай, жұмыста тепе-теңдік конфигурацияларды сипаттайтын теңдеулерді қорыту барысында, есептеулерді ықшамдау мақсатында Хартл формализміне [7] сүйеніп, айналатын жұлдыздың орталық тығыздығы айналмайтын жұлдыздың орталық тығыздығымен бірдей деген ұйғарым жасаймыз. Физикалық тұрғыдан алғанда, мұндай жуықтау ешқандай қарама-қайшылық тудырмайды. Математикалық тұрғыдан есептеулер жуық болғандықтан, біздің ұйғарым берілген дәлдікпен дұрыс шешімді береді. Хартл формализмі баяу айналатын жұлдыздардың тепе-теңдік күй конфигурациясын сипаттайтын теңдеулерді бұрыштық жылдамдықтың шаршысына дейінгі дәлдікпен қорытып шығаруға мүмкіндік береді.

Аспан механикасында, астрономияда және астрофизикада осы тектес мәселелерді шешуде жұлдыздар мен ғаламшарлардың ішкі құрылымын сұйық ретінде қарастыру ыңғайлы. Нәтижесінде айналмалы тепе-теңдік конфигурацияларды анықтайтын масса, радиус, инерция моменті, гравитациялық потенциал, бұрыштық момент, квадрупольдық момент және т.б. шамаларды орталық тығыздық пен бұрыштық жылдамдықтың (айналу периодының) функциясы ретінде өрнектейтін теңдеулерді аламыз. Өз кезегінде бұл шамалар (параметрлер) жұлдыздардың эволюциясын анықтауда маңызды рөл атқарады. Жоғарыдағы айтылған айналатын жұлдыздың тепе-теңдік конфигурациясын анықтау үшін классикалық физика жағдайында егжей-тегжейлі қарастыру өте маңызды.

Жалпы алғанда, егер жұлдыздың бұрыштық жылдамдығы кеплерлік жылдамдықтан өте аз болса, ондай жағдайды *баяу айналу* деп айтамыз. Яғни, жұлдыздың ішкі бөліктеріндегі қысымның, энергия тығыздығының және гравитациялық өрістің өзгерістері бірден әлдеқайда кіші болады. Қарапайым бір өлшемді жағдайда бұл шартты былай жазамыз:

$$\Omega^2 << \left(\frac{c}{R}\right)^2 \frac{GM}{Rc^2}, \tag{1}$$

мұндағы M – ұйытқымаған сфералық конфигурацияның массасы, ал R – оның радиусы, c – жарықтың вакуумдағы жылдамдығы, G – гравитациялық тұрақты, Ω – жұлдыздың бұрыштық жылдамдығы. Өрнектің оң жағы – M, R, G және c шамаларының көбейтіндісі түріндегі комбинациясы, ол бұрыштық жылдамдықтың шектік жағдайында Ньютонның өрнегіне айналады [7].

Ұйытқымаған конфигурация үшін $GM/(Rc^2)$ мәні бірден әлдеқайда кіші. Демек, (1) шартты төмендегідей жазуға болады:

$$R\Omega << c. \tag{2}$$

Басқаша айтқанда, жұлдыздың ішіндегі әрбір бөлшек релятивтік емес жылдамдықпен қозғалуы және конфигурациядағы геометриялық өзгерістер салыстырмалы түрде бірден әлдеқайда аз болуы тиіс.

Ньютонның гравитациялық өрісінде баяу айналатын жұлдыздар

Баяу айналатын дененің өз гравитациялық өрісінде тепе-теңдіктегі конфигурациясы жайлы теория Ньютонның гравитациялық өріс теориясынан белгілі [8-11]. Алайда, көптеген жұмыстарда айналудан пайда болатын өзгерістерді сипаттау үшін күрделі жуықтаулар мен әдістер пайдаланылады [12-17]. Бұл жұмыста біз Хартл ұсынған қарапайым формализмді пайдаланып, айналатын конфигурацияны сипаттайтын теңдеулерді классикалық физика аясында толығымен қорытып шығарамыз.

Ньютонның гравитациялық теориясында тепе-теңдік күйдегі қысым p, тығыздық ρ және гравитациялық потенциал Φ, сондай-ақ сұйықтың өз өсінен айналуының бірқалыпты (тұрақты) бұрыштық жылдамдығы Ω – Ньютонның үш гидростатикалық тепе-теңдік теңдеуінің шешімі арқылы анықталады.

Біріншісі – Ньютонның гравитациялық өріс теңдеуі:

$$\nabla^2\Phi(r,\theta) = 4\pi G\rho(r,\theta), \tag{3}$$

мұндағы ∇^2 – сфералық координат жүйесінде жазылған Лаплас операторы, $\Phi(r,\theta)$ – гравитациялық өрістің потенциялы, $\rho(r,\theta)$ – заттың тығыздығы. Мұнда жұлдыз тек z өсімен айналады деп ұйғарамыз, яғни жұлдыздың гравитациялық өрісі z өсіне қатысты симметриялы болады. Сол себепті, $\Phi(r,\theta)$ азимуталдық бұрыш ϕ-ге тәуелді емес.

Екіншісі – заттың күй теңдеуі, қарапайым түрде, оны бір өлшемді жағдайда былай жазуға болады:

$$p = p(\rho), \tag{4}$$

мұндағы p – заттың қысымы. Әдетте күй теңдеуі теориялық есептеулер мен тәжірибелік мәліметтерге негізделіп жазылады және әр түрлі объекттің (бас тізбектегі жұлдыз, ақ ергежейлі жұлдыз, нейтрондық жұлдыз т.б.) өз күй теңдеуі болады [18].

тикалық өрнекпен төмендегідей түрде жазуға болады:

$$\Theta = \theta, \quad \rho[r(R,\Theta),\Theta] = \rho(R) = \rho^{(0)}(R). \quad (6)$$

$r(R,\Theta)$-дің қатарға жіктелуін бұрыштық жылдамдықтың дәрежесін ескере отырып былай жазамыз:

$$r \approx R + \xi(R,\Theta) + O(\Omega^4), \quad (7)$$

мұндағы r – айналатын конфигурацияны сипаттайтын радиал координат және ол тығыздығы тұрақты (бірдей) бетті көрсетеді, R – айналмайтын конфигурацияны сипаттайтын координат және ол r-мен анықталатын тығыздығы бірдей бетті көрсетеді, ал $\xi(R,\Theta)$ – екі радиал координаттың айырымы және ол Ω^2-қа пропорционал.

Бұрыштық жылдамдықтың аз болуынан жұлдыздың тығыздығы бірдей беттеріндегі және ортасындағы $\xi(R,\Theta)$ жұлдыздың радиусымен салыстырғанда мардымсыз болады.

$$\xi(R,\Theta)/R << 1. \quad (8)$$

Егер айналатын конфигурацияның центріндегі тығыздықтың мәні айналмайтын конфигурацияның центріндегі тығыздықпен бірдей болатындай етіп таңдап алсақ, айналудан пайда болатын өзгерістер жұлдыздың центрінде жойылады, яғни ξ шамасы $R=0$ кезінде нөлге айналады. Біз, жоғарыда айтып кеткеніміздей, қалауымызша айналатын конфигурацияны дәл сондай орталық тығыздықтағы айналмайтын конфигурацияның ұйытқуы ретінде қарастырамыз, сондықтан (8) өрнек жұлдыздың барлық бөлігінде орындалады. R және Θ координат жүйесінде екі функция, яғни $r(R,\Theta)$ және гравитациялық потенциал $\Phi(R,\Theta)$ айналатын жұлдызды сипаттайды. Тығыздық пен қысым R-дің белгілі функциясы ретінде былай жазылады:

$$\rho[r(R,\Theta),\Theta] = \rho(R) = \rho^{(0)}(R),$$

$$p[r(R,\Theta),\Theta] = p(R) = p^{(0)}(R). \quad (9)$$

Сфералық гармоникаларға жіктеу

Ω^2 бойынша қатарға жіктелген r шамасы сәйкесінше (7) өрнекте көрсетілген, сонымен бірге Φ шамасын төмендегідей түрлендіреміз:

$$\Phi(r,\theta) = \Phi(R+\xi,\Theta) \approx \Phi(R,\Theta) + \xi\frac{d\Phi(R,\Theta)}{dR} + O(\Omega^4),$$

$$\Phi(R,\Theta) \approx \Phi^{(0)}(R) + \Phi^{(2)}(R,\Theta) + O(\Omega^4),$$

$$\Phi(r,\theta) \approx \Phi^{(0)}(R) + \xi\frac{d\Phi^{(0)}(R)}{dR} + \Phi^{(2)}(R,\Theta) + O(\Omega^4). \quad (10)$$

мұндағы $\Phi(R,\Theta)$ - айналатын конфигурация потенциалының R және Θ координаттарда жазылуы, $\Phi^{(0)}(R)$ - ұйытқымаған (айналмайтын) сфералық конфигурацияның потенциялы, $\Phi^{(2)}(R,\Theta)$ - ұйытқыған (айналатын) конфигурацияның потенциалы, ол Ω^2 -қа пропорционал, $\Phi(r,\theta)$ айналатын конфигурация потенциалының r және θ координаттарда жазылуы. Мұнда $\Phi^{(0)}(R) >> \Phi^{(2)}(R,\Theta)$ және $R >> \xi$ екенін естен шығармау қажет. Біз мұнда, бірінші, координаттық түрлендірулерді орындадық, екінші, потенциалды ξ бойынша Тейлор қатарына жіктедік, үшінші, ұйытқу әдісін пайдаланып потенциалдың негізгі бөлігі мен ұйытқыған бөлігін айқын көрсеттік, соңында $\Phi(r,\theta)$-ны Ω^2-тына дейінгі дәлдікпен жинақтап жаздық.

Бұл жіктеулерді (3), (5) өрнектерге қойып, R және Θ координаттарды Ω^2 -қа дейінгі жуықтаумен жазу қажет. $\xi(R,\Theta)$ мен $\Phi^{(2)}(R,\Theta)$ шамалары алынған өрнектен Ω^2-қа дейінгі жуықтаумен табылады. Егер бұл функциялар, бастапқыда сфералық гармоникаға жіктеліп жазылса, онда қойылған шарттар бойынша қатардың санаулы мүшелері ғана қалады. Осыны дәлірек көрсетелік

$$\xi(R,\Theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\xi_l(R)P_l(\cos\Theta)\,,$$

$$\Phi^{(2)}(R,\Theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\Phi_l^{(2)}(R)P_l(\cos\Theta)\,, \qquad (11)$$

мұнда $\Phi^{(2)}(R,\Theta)$ шамасы Ω^2 жуықтауына сәйкес келеді, ал $P_l(\cos\Theta)$ болса Лежандр полиномы (сфералық функцияның немесе сфералық гармоникалардың дербес түрі). Сонымен, жұлдыз полярлық өс бойымен айналса, онда конфигурацияның осы өске қатысты симметриялығынан сфералық гармоникалардың жұп дәрежелері ғана пайда болады. Шын мәнісінде, сфералық гармоникаларды пайдалуымыздың себебі теңдеулерге кіретін $\xi(R,\Theta)$ және $\Phi^{(2)}(R,\Theta)$ функциялардың айнымалыларын ажырату болатын. Осының нәтижесінде біз дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді қарапайым толық дифференциалдық теңдеулер түрінде ықшамдап жазып, интегралдай аламыз.

Осындай жолмен жіктелген Ньютонның өріс теңдеулерінде сәйкесінше ℓ-дің жұп мәндері ғана болады. $\xi_l(R)$ және $\Phi_l^{(2)}(R)$ шамалары үшін $\ell\geq 4$ болатын Ω-ға тәуелді теңдеулер нөлге тең. Яғни $l\geq 4$ үшін

$$\xi_l(R)=0,$$

$$\Phi_l^{(2)}(R)=0\,. \qquad (12)$$

Енді осыған көз жеткізу үшін (6)-(11) өрнектер (5) теңдеуге, яғни Ньютонның гидростатистикалық тепе-теңдік күй теңдеуіне қойылады. Сонда ол теңдеу төмендегідей жазылады

$$\int_0^p\frac{dp(r,\theta)}{\rho(r,\theta)}-\frac{1}{2}\Omega^2r^2\sin^2\theta+\Phi(r,\theta)=const\,. \qquad (13)$$

Лежандр полиномдары төмендегідей анықталатынын ескеруіміз керек:

$$P_0(\cos\theta)=1,$$

$$P_1(\cos\theta)=\cos\theta,$$

$$P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right). \qquad (14)$$

(13) өрнектегі $\sin^2\theta$-ны $P_0(\cos\theta)$ және $P_2(\cos\theta)$ арқылы жазсақ:

$$\sin^2\theta=\frac{2}{3}\left[P_0(\cos\theta)-P_2(\cos\theta)\right], \qquad (15)$$

бұдан шығатын қорытынды ℓ тек $\ell=0$ және $\ell=2$ болатын шамалармен ғана анықталады екен. Сонымен, ℓ шамасының шексіздіктен 2-ге дейін мәндерінің нөлге тең болып қалуы жуықтауда баяу айналу шартының нәтижесі болып табылады. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің орнына толық дифференциалдық теңдеулерді аламыз. Ал ол теңдеулерден бізге қажет белгісіз төрт функция: $\Phi_0^{(2)}(R)$, $\Phi_2^{(2)}(R)$, $\xi_0(R)$ және $\xi_2(R)$ анықталатын болады.

Сонымен (13) гидростатикалық тепе-теңдік теңдеуін бұрыштық жылдамдықтың дәрежесі бойынша реттеп жазсақ, Ω^0-ге сәйкес кететін өрнек мына түрде болады:

$$\int_0^P\frac{dp^{(0)}(R)}{\rho^{(0)}(R)}+\Phi^{(0)}(R)=const\,. \qquad (16)$$

Бұл айналмайтын конфигурацияны сипаттайтын гидростатикалық тепе-теңдік теңдеуі.

Сәйкесінше Ω^2 бойынша мына теңдеулерді де жазуға болады:

$$(l=0): \qquad -\frac{1}{3}\Omega^2 R^2 + \Phi_0^{(2)}(R) + \xi_0(R)\frac{d\Phi^{(0)}(R)}{dR} = 0\,, \tag{17}$$

$$(l=2): \qquad \frac{1}{3}\Omega^2 R^2 + \Phi_2^{(2)}(R) + \xi_2(R)\frac{d\Phi^{(0)}(R)}{dR} = 0\,. \tag{18}$$

Енді Ф потенциалын табу үшін өріс теңдеуін сфералық координаттарда жазалық

$$\begin{aligned}
\nabla^2\Phi(r,\theta) &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi(r,\theta)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi(r,\theta)}{\partial\theta}\right)\\
&= \nabla_r^2\Phi(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\nabla_\theta^2\Phi(r,\theta)\\
&\approx \nabla_r^2\Phi^{(0)}(r) + \nabla_r^2\Phi_0^{(2)}(r) + \nabla_r^2\Phi_2^{(2)}(r)P_2(\cos\theta) + \frac{1}{r^2}\nabla_\theta^2\Phi_2^{(2)}(r)P_2(\cos\theta)\\
&= 4\pi G\rho(r,\theta),
\end{aligned} \tag{19}$$

мұндағы

$$\nabla_r^2\Phi^{(0)}(r) \approx \nabla_R^2\Phi^{(0)}(R) + \xi(R,\Theta)\frac{d}{dR}\nabla_R^2\Phi^{(0)}(R)\,. \tag{20}$$

Енді Ф-дің өрнегін R және Θ координаттарда және Ω^2 -қа дейінгі жуықтаумен қайта реттеп жазсақ:

$$\begin{aligned}
\nabla^2\Phi(r,\theta) = \nabla_R^2\Phi^{(0)}(R) + \xi(R,\Theta)\frac{d}{dR}\nabla_R^2\Phi^{(0)}(R) + \nabla_R^2\Phi_0^{(2)}(R)\\
+ \nabla_R^2\Phi_2^{(2)}(R)P_2(\cos\Theta) + \frac{1}{R^2}\nabla_\Theta^2\Phi_2^{(2)}(R)P_2(\cos\Theta) = 4\pi G\rho(R)
\end{aligned} \tag{21}$$

бұл өрнектегі $\xi(R,\Theta) = \xi_0(R) + \xi_2(R)P_2(\cos\Theta)$ -ның сфералық гармоникаға жіктелуін және (16), (17), (18) өрнектерін қоса, жуықтау дәрежелерін ескере отырып, сәйкесінше, келесі теңдеулерді жазуға болады.

Өріс теңдеуінен біз келесі өрнектерді аламыз:

$$\Omega^0: \Rightarrow \qquad \nabla_R^2\Phi^{(0)}(R) = 4\pi G\rho^{(0)}(R)\,, \tag{22}$$

$$\Omega^2(l=0): \Rightarrow \qquad \xi_0(R)\frac{d}{dR}\nabla_R^2\Phi^{(0)}(R) + \nabla_R^2\Phi_0^{(2)}(R) = 0\,, \tag{23}$$

$$\Omega^2\left(l=2\right):\Rightarrow \qquad \xi_2(R)\frac{d}{dR}\nabla_R^2\Phi^{(0)}(R)+\nabla_R^2\Phi_2^{(2)}(R)-\frac{6}{R^2}\Phi_2^{(2)}(R)=0\,. \tag{24}$$

Гидростатикалық тепе-теңдік теңдеуінен алатынымыз:

$$\Omega^0:\Rightarrow \qquad \int_0^P\frac{dp^{(0)}(R)}{\rho^{(0)}(R)}+\Phi^{(0)}(R)=const\,, \tag{25}$$

$$\Omega^2\left(l=0\right):\Rightarrow \qquad \Phi_0^{(2)}\left(R\right)+\xi_0\left(R\right)\frac{d\Phi^{(0)}(R)}{dR}-\frac{1}{3}\Omega^2R^2=0\,, \tag{26}$$

$$\Omega^2\left(1=2\right):\Rightarrow \qquad \Phi_2^{(2)}(R)+\xi_2\left(R\right)\frac{d\Phi^{(0)}(R)}{dR}+\frac{1}{3}\Omega^2R^2=0\,. \tag{27}$$

Мұнда анықтауға тиісті екі басты мәселе бар: біріншісі – айналып тұрған жұлдыздың массасы мен орталық тығыздығының байланысы, ал екіншісі – жұлдыздың пішіні. Тепе-теңдік конфигурацияны толықтай анықтайтын функциялардың $\Phi_0^{(2)}(R)$, $\Phi_2^{(2)}(R)$, $\xi_0(R)$ және $\xi_2(R)$ дифференциалдық өрнектері осы мәселелерді толық шешуге мүмкіндік береді.

Масса мен орталық тығыздықтың байланысы

Айналып тұрған конфигурацияның массасы тығыздықтың көлем бойынша интегралымен беріледі. Оны R мен Θ координаттарында жазып, Ω^2-қа дейінгі дәлдікпен қатарға жіктейміз, содан соң бөліктеп интегралдап, айналмайтын конфигурациядан айналатын конфигурация үшін массаның өзгерісі $\delta M=M^{(2)}$ табылады. Толық айналатын массаны өрнектеп жазалық:

$$\begin{aligned}
M_{tot}(R)&=\int_V\rho(r,\theta)dV=\int_V\rho(r,\theta)r^2dr\sin\theta d\theta d\phi\\
&=\left|r^2dr=(R+\xi)^2(dR+d\xi)\approx R^2\left(1+\frac{2\xi}{R}\right)\left(1+\frac{d\xi}{dR}\right)dR\approx\left(1+\frac{2\xi}{R}+\frac{d\xi}{dR}\right)R^2dR\right|\\
&\approx\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\rho(R)R^2dR\sin\Theta d\Theta d\phi\\
&+\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\rho(R)R^2\left(\frac{2\xi\left(R,\Theta\right)}{R}+\frac{d\xi\left(R,\Theta\right)}{dR}\right)dR\sin\Theta d\Theta d\phi.
\end{aligned} \tag{28}$$

Соңғы екі қосындыны былай белгілеуге болады:

$$M_{tot}(R)=M^{(0)}(R)+M^{(2)}(R)\,. \tag{29}$$

Егер келесі интегралдарды ескерсек

$$\int_0^{\pi}\sin\Theta d\Theta=2\,,\qquad\qquad \int_0^{\pi}P_2(\cos\Theta)\sin\Theta d\Theta=0\,,$$

онда статикалық масса былай анықталады:

$$M^{(0)}(R)=M(R)=4\pi\int_0^{R}\rho^{(0)}(R)R^2dR\,. \tag{30}$$

Ал массалар айырымын $M^{(2)}(R)$ анықтау үшін жұлдыздың ішінде және сыртында тығыздықтың шекаралық шарттарын ескеру қажет:

$$\begin{aligned}&\rho=\rho(R),\ \ 0<R<a,\\ &\rho=0,\ \ R\geq a,\end{aligned} \tag{31}$$

мұндағы a – айналмайтын жұлдыздың радиусы. Онда $\delta M=M^{(2)}$ төмендегідей анықталады:

$$M^{(2)}(R)=4\pi\int_0^{R}\rho(R)R^2\left(\frac{2\xi_0(R)}{R}+\frac{d\xi_0(R)}{dR}\right)dR=4\pi\int_0^{R}\left(-\xi_0(R)\frac{d\rho(R)}{dR}\right)R^2dR. \tag{32}$$

Масса мен орталық тығыздықтың байланысы тек $\ell=0$ болатын теңдеулермен ғана анықталады. Толық масса алыс қашықтықтарда Φ-дің $1/R$-ге пропорционал болатын мүшесінен табылады және $l=0$-ден басқа барлық құраушылар жылдамырақ жойылады. Осыған ұқсас жұлдыздың ортасында тығыздықтың $l=0$-ден өзге құраушылары жойылады, сонымен орталық тығыздықты анықтауда тек $l=0$ болатын мүшелер үлес қосады. Бізге $\ell=0$ теңдеулердің мәнін түсіну үшін оларды гидростатикалық тепе-теңдік теңдеуіне ұқсас түрде жазып алу ыңғайлы. Ол үшін төмендегі белгілеуді енгіземіз:

$$p^{*}(R)=\frac{GM(R)}{R^2}\xi_0(R)\,, \tag{33}$$

Сондай-ақ төмендегі қатынастарды табуға болады:
(22) өрнектен:

$$\frac{d}{dR}\nabla^2\Phi^{(0)}(R)=4\pi G\frac{d\rho^{(0)}(R)}{dR}\,, \tag{34}$$

(25) өрнектен:

$$\frac{dp^{(0)}(R)}{dR}=\rho^{(0)}(R)\frac{d\Phi^{(0)}\left(R\right)}{dR}. \qquad (35)$$

(30) өрнектен:

$$\frac{dM^{(0)}(R)}{dR}=4\pi R^2\rho^{(0)}(R). \qquad (36)$$

Жоғарыдағы (22) және (36) өрнектерінен төмендегі қатынасты аламыз:

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{d\Phi^{(0)}(R)}{dR}\right)=4\pi G\rho^{(0)}(R)=\frac{G}{R^2}\frac{dM^{(0)}(R)}{dR}. \qquad (37)$$

бұдан шығатыны:

$$R^2\frac{d\Phi^{(0)}(R)}{dR}=GM^{(0)}(R)+C_1, \qquad (38)$$

немесе

$$\frac{d\Phi^{(0)}(R)}{dR}=\frac{GM^{(0)}(R)}{R^2}+\frac{C_1}{R^2}. \qquad (39)$$

Бұл жерде гравитациялық потенциалдың шектілік шартынан $R\to 0,\quad \Phi^{(0)}\to const$ екенін ескеріп, C_1 шамасының нөлге теңдігін көреміз.

(33) белгілеуді ескере отырып (32) өрнекті қайта жазсақ:

$$M^{(2)}(R)=\int_0^R 4\pi R^2\frac{d\rho(R)}{dp(R)}\rho(R)p^*(R)dR. \qquad (40)$$

Сондай-ақ (26) теңдеуден алатынымыз:

$$-\frac{2}{3}\Omega^2R+\frac{d\Phi_0^{(2)}(R)}{dR}=-\frac{dp^*(R)}{dR}. \qquad (41)$$

(32) теңдеуін былай да түрлендіруге болады.

$$\frac{dM^{(2)}(R)}{dR}=-4\pi R^2\xi_0(R)\frac{d\rho^{(0)}(R)}{dR}. \qquad (42)$$

Енді (23) теңдеуінің орнына (42) өрнегін қойып:

$$\frac{d\Phi_0^{(2)}(R)}{dR} = \frac{GM^{(2)}(R)}{R^2} + C_2, \qquad (43)$$

теңдеуін аламыз. Тұрақты шаманы нөл болады деп ұйғарсақ, онда (41) теңдеу мына түрге келеді:

$$-\frac{dp^*(R)}{dR} + \frac{2}{3}\Omega^2 R = \frac{GM^{(2)}(R)}{R^2}, \qquad (44)$$

бұл теңдеу гидростатикалық тепе-теңдік теңдеуіне сәйкес келеді.

Сонымен $\ell = 0$ болатын теңдеулерді жинақтап жазсақ, мынадай болады:

$$M^{(2)}(R) = \int_0^R 4\pi R^2 \frac{d\rho(R)}{dp(R)} \rho(R) p^*(R) dR, \qquad -\frac{dp^*(R)}{dR} + \frac{2}{3}\Omega^2 R = \frac{GM^{(2)}(R)}{R^2}. \qquad (45)$$

Бұл теңдеулер айналып тұрған жұлдыздағы бірлік массаға сәйкес келетін қысым, центрден тепкіш күш және гравитациалық күш арасындағы балансты көрсетеді.

Сонымен, айналып тұрған жұлдыздың массасы мен орталық тығыздығының байланысын табу үшін:

1) орталық тығыздықтың мәнін беру керек. Осы орталық тығыздықпен айналмайтын конфигурацияны есептеу керек.

2) шекаралық шарттармен қоса, яғни, айналып тұрған конфигурация үшін, айналмайтын конфигурацияда да дәл сондай орталық тығыздық болсын деген шарт негізінде

$$p^* \to \frac{1}{3}\Omega^2 R^2, \qquad R \to 0, \qquad (46)$$

жұлдыздың ортасынан бастап сыртына дейін (45) өрнекті интегралдаймыз.

Жұлдыздың пішіні

Айналып тұрған жұлдыздың пішінін $\ell = 0$ және $\ell = 2$ болатын теңдеулер береді. Егер айналмайтын жұлдыздың радиусы a болса, онда айналып тұрған жұлдыздың беті (7) және (11) өрнектер арқылы берілген дәлдікпен мына түрде жазылады:

$$r(a,\Theta) = a + \xi_0(a) + \xi_2(a) P_2(\cos\Theta), \qquad (47)$$

$\xi_0(a)$ шаманың мәні әдеттегідей $\ell = 0$ болғандағы өрнекпен есептелінеді

$$\xi_0(a) = \frac{a^2}{GM} p^*(a). \qquad (48)$$

мұндағы M - айналмайтын конфигурацияның толық массасы.

Енді $\xi_2(a)$ шамасы бар гравитациялық өріс теңдеуі (24) және гидростатикалық тепе-теңдік теңдеуін (27) қарастырайық. $\xi_2(R)$ функциясы жүйенің квадрупольдық моментін, полярлық және экваторлық радиустарын анықтау үшін қажет. Ол үшін (24) теңдеуді қайта жазып,

$$\xi_2(R)\frac{d}{dR}\nabla_R^2\Phi^{(0)}(R)+\nabla_R^2\Phi_2^{(2)}(R)-\frac{6}{R^2}\Phi_2^{(2)}(R)=0\ , \tag{49}$$

(27) теңдеуден $\xi_2(R)$ шамасын өрнектеп аламыз, ол төмендегідей болады:

$$\xi_2(R)=-\frac{R^2}{GM^{(0)}(R)}\left(\frac{1}{3}\Omega^2R^2+\Phi_2^{(2)}(R)\right), \tag{50}$$

бұл өрнекті (49)-ға қойсақ:

$$\nabla_R^2\Phi_2^{(2)}(R)-\frac{6}{R^2}\Phi_2^{(2)}(R)=\frac{4\pi R^2}{M^{(0)}(R)}\left(\frac{1}{3}\Omega^2R^2+\Phi_2^{(2)}(R)\right)\frac{d\rho(R)}{dR}. \tag{51}$$

Соңғы теңдеуді шешу үшін оны бірінші реттік сызықты дифференциалдық теңдеу түрінде жазып алу ыңғайлы. Себебі, бұл теңдеуді тек сандық әдістермен электронды есептеуіш машиналарда интегралдап есептеуге болады. Ал бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді интегралдау (есептеу) екінші ретті дифференциалдық теңдеуге қарағанда аз уақытты қажет етеді. Осы мақсатта $\Phi_2^{(2)}(R)=\varphi(R)$ және $\chi(R)$ белгілеулерін енгіземіз де (51) теңдеудің келесі түрін аламыз:

$$\frac{d\chi(R)}{dR}=-\frac{2GM(R)}{R^2}\varphi(R)+\frac{8\pi}{3}\Omega^2R^3G\rho(R), \tag{52}$$

$$\frac{d\varphi(R)}{dR}=\left(\frac{4\pi R^2\rho(R)}{M(R)}-\frac{2}{R}\right)\varphi(R)-\frac{2\chi(R)}{GM(R)}+\frac{4\pi}{3M(R)}\Omega^2R^4\rho(R), \tag{53}$$

Бұл теңдеулердің шешімі жұлдыздың центрінде регулярлы болуы тиіс. Яғни $R\to 0$ болғанда:

$$\varphi(R)\to AR^2, \qquad \chi(R)\to BR^4, \tag{54}$$

мұндағы *A*, *B* тұрақтыларының мәні төмендегідей байланысқан:

$$B+\frac{2\pi}{3}G\rho_cA=\frac{2\pi}{3}G\rho_c\Omega^2, \tag{55}$$

ρ_c - жұлдыздың центріндегі тығыздық, есептеулер үшін оның мәні қолдан енгізіледі. Өрнекті интегралдағаннан кейін шыққан тұрақтылар үлкен қашықтықтардағы функцияның мәніне $\varphi(R)\to 0$ негізделіп табылады. (52), (53) теңдеулерінен жұлдыздың сыртындағы шешім төмендегідей болады:

$$\varphi_{ex}(R)=\frac{K_1}{R^3}, \qquad \chi_{ex}(R)=\frac{K_1 GM^{(0)}}{2R^4} \ . \tag{56}$$

Ішкі шешім болса, дербес шешім мен біртекті шешімнің қосындысы түрінде жазылады. Дербес шешім (52), (53) теңдеулерді жұлдыздың ортасынан бастап сыртына дейін интегралдау арқылы табылады. Интегралдау кезінде *A* және *B* тұрақтыларын (55) шартын қанағаттандыратындай етіп таңдап алу қажет. Ал біртекті шешім (52), (53) теңдеулердің біртекті бөлігінен табылады:

$$\frac{d\chi_h(R)}{dR}=-\frac{2GM(R)}{R^2}\varphi_h(R), \tag{57}$$

$$\frac{d\varphi_h(R)}{dR}=\left(\frac{4\pi R^2\rho(R)}{M(R)}-\frac{2}{R}\right)\varphi_h(R)-\frac{2\chi_h(R)}{GM(R)}. \tag{58}$$

Енді осы жағдай үшін *A* мен *B* мына түрде байланысқан:

$$B+\frac{2\pi}{3}G\rho_c A=0 \ . \tag{59}$$

Сонымен жалпы ішкі шешімді дербес және біртекті шешімдердің қосындысы ретінде төмендегідей жазуға болады:

$$\varphi_{in}(R)=\varphi_p(R)+K_2\varphi_h(R), \tag{60}$$

$$\chi_{in}(R)=\chi_p(R)+K_2\chi_h(R). \tag{61}$$

(56), (60), (61) өрнектерді ($R=a$) бетінде есептеу арқылы тұрақты шамалар K_1 мен K_2 табылады. $\varphi_{in}(R)$ шамасы табылып, $\xi_2(R)$ шамасы болса төмендегі өрнектен алынады:

$$\xi_2(R)=-\frac{R^2}{GM(R)}\left(\frac{1}{3}\Omega^2R^2+\varphi_{in}(R)\right) \tag{62}$$

Жұлдыздың эллипстілігі (ellipticity**)**

Сұйық денелер үшін төмендегідей анықталған физикалық шама

$$\varepsilon(R)=-\frac{3\xi_2(R)}{2R}, \tag{63}$$

R-ге тәуелді тығыздығы тұрақты жұлдыз бетінің эллипстілігі болып табылады. Осы өрнекті ескере отырып, (51) арқылы

(50) теңдеулерден $\Phi_2^{(2)}(R)$-ден құтылып, $\varepsilon(R)$ үшін төмендегідей өрнекті аламыз:

$$\frac{M(R)}{R}\frac{d^2\varepsilon(R)}{dR^2}+\frac{2}{R}\frac{dM(R)}{dR}\frac{d\varepsilon(R)}{dR}+\frac{2dM(R)}{dR}\frac{\varepsilon(R)}{R^2}-\frac{6M(R)\varepsilon(R)}{R^3}=0, \qquad (64)$$

Немесе бұл өрнекті ықшам түрде жазуға болады:

$$\frac{d}{dR}\frac{1}{R^4}\frac{d}{dR}\left[\varepsilon(R)M(R)R^2\right]=4\pi\varepsilon(R)\frac{d\rho(R)}{dR}. \qquad (65)$$

Бұл теңдеу Клеро теңдеуіне пара-пар. Мұндағы $M(R)$ мен $\rho(R)$ болса R-дің белгілі функциясы болып табылады. Эллипстілік R-дің аз мәнінде регулярлы шама болуы керек және (65) өрнекте көрсетілгендей *R=0* де тұрақты болады. Осы шекаралық шартпен (65) өрнекті интегралдаудан $\varepsilon(R)$-дің пішіні табылады. Алайда $\varepsilon(R)$-дің модулін табу үшін (56) және (62) өрнектерді пайдалану керек, яғни ішкі шешім мен сыртқы шешімді жұлдыздың бетінде тігіп (жымдастырып), интегралдау тұрақтыларын табамыз. Жұлдыздың бетіндегі шекаралық шарттармен бірге жұлдыздың ортасында регулярлы болу шарты арқылы (65) теңдеу тығыздығы тұрақты жұлдыз бетінің эллипстілігін R-дің функциясы ретінде анықтайды [19].

Квадрупольдық момент

Ньютондық потенциалды жұлдыздың сыртында келесі түрде жазуға болады:

$$\Phi(R,\Theta)=\Phi^{(0)}(R)+\Phi_0^{(2)}(R)+\Phi_2^{(2)}(R)P_2(\cos\Theta), \qquad (66)$$

мұндағы

$$\Phi^{(0)}(R)=-\frac{GM^{(0)}}{R}, \qquad (67)$$

$$\Phi_0^{(2)}(R)=-\frac{GM^{(2)}}{R}, \qquad (68)$$

$$\Phi_2^{(2)}(R)=\frac{K_1}{R^3}. \qquad (69)$$

(29) ескере отырып (66) төмендегідей жазуға болады:

$$\Phi(R,\Theta)=-\frac{GM_{tot}}{R}+\frac{K_1}{R^3}P_2(\cos\Theta), \qquad (70)$$

мұндағы тұрақты шама $K_1=GQ$, ал Q шамасы жұлдыздың квадрупольдық моменті деп аталады. Хартлдың анықтамасы бойынша сығылыңқы денелер үшін $Q>0$, ал созылыңқы денелер үшін $Q<0$.

Инерция моменті

Баяу айналатын жұлдыздың толық массасына ұқсас толық инерция моментін былай есептеуге болады:

$$I_{tot} = \int_V \rho(r,\theta)(r\sin\theta)^2 dV = \int_V \rho(r,\theta) r^4 dr \sin^3\theta d\theta d\phi$$
$$= \left| r^4 dr = (r+R)^4 (dR + d\xi) \approx R^4\left(1+\frac{4\xi}{R}\right)\left(1+\frac{d\xi}{dR}\right)dR \approx \left(1+\frac{4\xi}{R}+\frac{d\xi}{dR}\right)R^4 dR \right| \quad (71)$$
$$= \int_V \rho(R) R^4 dR \sin^3\Theta d\Theta d\phi + \int_V \rho(R) R^4 \left(\frac{4\xi(R,\Theta)}{R} + \frac{d\xi(R,\Theta)}{dR}\right) dR \sin^3\Theta d\Theta d\phi.$$

бұрыштар бойынша $0 < \Theta < \pi$ және $0 < \phi < 2\pi$ аралығында интегралдасақ және мына интегралдарды ескере отырып:

$$\int_0^\pi \sin^3\Theta d\Theta = \frac{4}{3}, \qquad \int_0^\pi P_2(\cos\Theta)\sin^3\Theta d\Theta = -\frac{4}{15},$$

жоғарыдағы интегралды қайта жазсақ, онда инерция моменті төмендегідей болады [14]:

$$I_{tot}(R) = I^{(0)}(R) + I^{(2)}(R), \quad (72)$$

$$I^{(0)}(R) = \frac{8\pi}{3}\int_0^R \rho(R) R^4 dR, \quad (73)$$

$$I^{(2)}(R) = \frac{8\pi}{3}\int_0^R \rho(R) R^4 \left(\frac{d\xi_0(R)}{dR} - \frac{1}{5}\frac{d\xi_2(R)}{dR} + \frac{4}{R}\left[\xi_0(R) - \frac{1}{5}\xi_2(R)\right]\right) dR$$
$$= \frac{8\pi}{3}\int_0^R \left(\left[\frac{1}{5}\xi_2(R) - \xi_0(R)\right]\frac{d\rho(R)}{dR}\right) R^4 dR, \quad (74)$$

мұндағы $I^{(0)}(R)$ - статикалық, яғни сфералық конфигурацияның инерция моменті, ал $I^{(2)}(R)$ - айналудан пайда болған инерция моментінің өзгерісі. Берілген жуықтауда алынған нәтижелер баяу айналатын релятивтік жұлдыздардың инерция моментіне сәйкес келеді [20].

Қысқаша тұжырым

Статикалық жағдай

Масса мен орталық тығыздық арасындағы байланысты табу үшін:

1) бір параметрге тәуелді $p = p(\rho)$ баротроптық күй теңдеуін тағайындап аламыз. Күй теңдеуі политроптық түрде, кесте түрінде және т.б. болуы мүмкін.

2) орталық тығыздықтың мәнін $\rho(R=0)=\rho_c$ өзіміз қолдан береміз. Ньютонның өріс теңдеуі мен гидростатикалық тепе-теңдік теңдеуінен масса мен қысымды есептеу керек.

$$\begin{cases} \dfrac{dM^{(0)}(R)}{dR} = 4\pi R^2 \rho^{(0)}(R), \\ \dfrac{dp^{(0)}(R)}{dR} = -\rho^{(0)}(R)\dfrac{GM^{(0)}(R)}{R^2}. \end{cases} \quad (75)$$

Ол үшін жұлдыздың ортасындағы массаның мәні $M^{(0)}(R=0)=0$ болу қажет. Бұл масса үшін регулярлық шарт деп аталады. Айналмайтын жұлдыз үшін гравитациялық потенциал былай табылады:

$$\frac{d\Phi^{(0)}(R)}{dR} = \frac{GM^{(0)}(R)}{R^2} = -\frac{1}{\rho(R)}\frac{dp^{(0)}(R)}{dR}, \quad (76)$$

жұлдыздың бетінде қысым нөлге тең $p^{(0)}(R=a)=0$. Ал $M^{(0)}(R=a)=M$ статикалық жұлдыздың толық массасы.

Айналатын жағдай: $l=0$ теңдеулер

Жұлдыздың өз өсінен айналуының бұрыштық жылдамдығын өзіміз таңдап аламыз. Мысал ретінде оның сынақ мәнін мына түрде жазсақ болады:

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM^{(0)}(a)}{a^3}}, \qquad (77)$$

және келесі шекаралық шарттар негізінде:

$$R \to 0, \quad p^* \to \frac{1}{3}\Omega^2 R^2, \quad M^{(2)} \to 0, \qquad (78)$$

төмендегі екі теңдеуді жұлдыздың ортасынан бастап бетіне дейін интегралдаймыз

$$\begin{cases} \dfrac{dM^{(2)}(R)}{dR} = 4\pi R^2 \rho(R) \dfrac{d\rho(R)}{dR} p^*(R), \\ \dfrac{dp^*(R)}{dR} = \dfrac{2}{3}\Omega^2 R - \dfrac{GM^{(2)}(R)}{R^2}. \end{cases} \qquad (79)$$

Жоғарыдағы шекаралық шарттар айналатын жұлдыз бен айналмайтын жұлдыздағы орталық тығыздықтың бірдей болатынына кепілдік береді. Ал (79) теңдеулер жүйесі $M^{(2)}(R)$ массаның өзгерісі мен $p^*(R)$ қысым функциясын анықтайды. Өз кезегінде қысым функциясы айналатын жұлдыздың пішінін анықтауға мүмкіндік береді.

Айналатын жағдай: $l=2$ теңдеулер

а) дербес шешім

төмендегі шарттар негізінде:

$$\varphi(R) \to AR^2, \quad \chi(R) \to BR^4, \quad B + \frac{2\pi}{3} G\rho_c A = \frac{2\pi}{3} G\rho_c \Omega^2, \qquad (80)$$

мұндағы A және B кез келген тұрақтылар. Мысал ретінде $A=1$ деп таңдап алсақ, B жоғарыдағы шарттан табылады.

Келесі екі теңдеуді жұлдыздың ортасынан бастап бетіне дейін интегралдаймыз:

$$\begin{cases} \dfrac{d\chi(R)}{dR} = -\dfrac{2GM(R)}{R^2}\varphi(R) + \dfrac{8\pi}{3}\Omega^2 R^3 G\rho(R), \\ \dfrac{d\varphi(R)}{dR} = \left(\dfrac{4\pi R^2 \rho(R)}{M(R)} - \dfrac{2}{R}\right)\varphi(R) - \dfrac{2\chi(R)}{GM(R)} + \dfrac{4\pi}{3M(R)}\Omega^2 R^4 \rho(R), \end{cases}, \qquad (81)$$

одан $\varphi_p(R)$ және $\chi_p(R)$ дербес шешімдерін аламыз.

б) біртекті шешім
Төмендегі шарттар негізінде:

$$\varphi_h(R) \to AR^2, \quad \chi_h(R) \to BR^4, \quad B + \frac{2\pi}{3} G\rho_c A = 0, \tag{82}$$

келесі екі біртекті теңдеуді жұлдыздың ортасынан бетіне дейін интегралдап біртекті шешімдерді аламыз:

$$\begin{cases} \dfrac{d\chi_h(R)}{dR} = -\dfrac{2GM(R)}{R^2}\varphi_h(R) \\ \dfrac{d\varphi_h(R)}{dR} = \left(\dfrac{4\pi R^2\rho(R)}{M(R)} - \dfrac{2}{R}\right)\varphi_h(R) - \dfrac{2\chi_h(R)}{GM(R)} \end{cases} \tag{83}$$

Мұнда $A = 1$ деп таңдап алсақ, B жоғарыдағы (82) шарттан табылады. Соңында жалпы ішкі шешімді былай жазуға болады:

$$\varphi_{in}(R) = \varphi_p(R) + K_2\varphi_h(R), \qquad \chi_{in}(R) = \chi_p(R) + K_2\chi_h(R). \tag{84}$$

c) Сыртқы шешім мен ішкі шешімді тігу (жымдастыру)
Сыртқы шешім мына түрде жазылады:

$$\varphi_{ex}(R) = \frac{K_1}{R^3}, \qquad \chi_{ex}(R) = \frac{K_1 GM^{(0)}}{2R^4}. \tag{85}$$

(84) - пен (85) - ті $(R = a)$ кезінде теңестіру арқылы

$$\varphi_{ex}(R = a) = \varphi_{in}(R = a), \ \chi_{ex}(R = a) = \chi_{in}(R = a)$$

K_1, K_2 тұрақтылар анықталады және осы сыртқы шешім мен ішкі шешімді жұлдыздың бетінде теңестіру әдісі - шешімдерді *тігу* немесе *жымдастыру* деп аталады. Шешімдерді тігу әдісі гравитациялық потенциалдың жұлдыздың ішінде, бетінде және сыртында үзіліссіз болу физикалық шартынан шығады.

Айналатын конфигурацияның полярлық радиусы $r_п$ мен экваторлық радиусы $r_э$ төмендегідей болады:

$$r(a,\Theta) = a + \xi_0(a) + \xi_2(a)P_2(\cos\Theta), \tag{86}$$

$$r_п = r(a,0) = a + \xi_0(a) + \xi_2(a), \tag{87}$$

$$r_э = r(a,\pi/2) = a + \xi_0(a) - \xi_2(a)/2. \tag{88}$$

Полярлық және экваторлық радиустар арқылы жұлдыздың эксцентриситетін жазуға болады

$$e = \sqrt{1-(r_п/r_э)^2}. \tag{89}$$

Мұнда эксцентриситет пен эллипстіліктің екі түрлі шама екенін көреміз. Біздің жағдай үшін эксцентриситет тек жұлдыз бетінің пішінін анықтайтын шама болса, эллипстілік жұлдыздың ортасынан бастап бетіне дейін тығыздығы тұрақты беттерді және жұлдыздың пішінін анықтайтын шама болып шықты.

Қорытынды

Жұмыста классикалық физика шеңберінде Хартл формализміне негізделіп, баяу айналатын жұлдыздардың гидростатикалық тепе-теңдік конфигурацияларын сипаттайтын теңдеулерді қорытып шығардық. Айналудан пайда болған өзгерістерді айналмайтын конфигурациялардың ұйытқуы деп бұрыштық жылдамдықтың екінші дәрежесіне дейінгі дәлдікпен есептедік. Теңдеулердің барлығы интегралдауға ыңғайлы болатындай етіп, бірінші реттік толық дифференциалдық теңдеулер түрінде жазылды. Баяу айналатын жұлдызды сипаттайтын барлық физикалық шамалар орталық тығыздық пен бұрыштық жылдамдықтың (айналу периодының) функциясы ретінде анықталды. Алынған нәтижелерді астрономия, аспан механикасы, астрофизика т.б. ғылымның салаларында қолдануға болады.

Алғыс айту

Бұл жұмысқа бағалы пікір білдіріп, әр түрлі ұсыныс жасаған Мехико Ұлттық Университетінің профессоры Эрнандо Кэведоға алғыс айтамыз.

Жұмыс ҚР БҒМ 1597/ГФ3 грантының қолдауымен орындалды.

References

1. Meynet G., Maeder A. Stellar evolution with rotation. V. Changes in all the outputs of massive star models // Astronomy and Astrophysics. – 2000. –Vol. 361. - P. 101-120.
2. Meynet G., Maeder A. Stellar evolution with rotation. X. Wolf-Rayet star populations at solar metallicity // Astronomy and Astrophysics. – 2003. - Vol. 404.- P. 975-990.
3. Ekstrom S., Meynet G., Chiappini C., Hirschi R., Maeder A. Effects of rotation on the evolution of primordial stars // Astronomy and Astrophysics.- 2008. - Vol. 489. - Issue 2.- P. 685-698.
4. Chandrasekhar S. The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs // Astrophysical Journal. - 1931. - Vol. 74. - P. 81-82.
5. Chandrasekhar S., Roberts P. On Highly Rotating Polytropes. II // Astrophysical Journal. -1963. – Vol. 138. – P. 809.
6. Stergioulas N. Rotating Stars in Relativity // Living Reviews in Relativity. – 2003. – Vol. 6. – P. 3.
7. Hartle J. B. Slowly Rotating Relativistic Stars. I. Equations of Structure // Astrophysical Journal. -1967. - Vol. 150. – P. 1005.
8. Chandrasekhar S. Introduction to the Study of Stellar Structure. Chicago: University of Chicago Press. - 1939.
9. Jeffreys H. The Earth. Cambridge: Cambridge University Press. - 1959.
10. Chandrasekhar S. The equilibrium of distorted polytropes. I. The rotational problem // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1933. – Vol. 93. – P. 390-406.
11. Chandrasekhar S., Lebovitz N. R. On the Oscillations and the Stability of Rotating Gaseous Masses. III. The Distorted Polytropes. // Astrophysical Journal. – 1962. – Vol. 136. – P.1082.
12. James R.A. The Structure and Stability of Rotating Gas Masses // Astrophysical Journal. – 1964. – Vol. 140. – P.552.
13. Roxburgh L W. On stellar rotation, I. The rotation of upper main-sequence stars // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1964. – Vol. 128. – P.157.

14. Monaghan F.F., Roxburgh I.W. The structure of rapidly rotating polytropes // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1965 . – Vol. 131. – P.13.
15. Anand S.P.S. The Equilibrium Structure of Rapidly Rotating Gaseous Polytropes and Completely Degenerate Systems // Astrophysical Journal. – 1968. – Vol. 153. – P.135.
16. Sedrakian D.M., Papoian V.V., Chubarian E.V. On the theory of rapidly rotating white dwarfs // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 1970. - Vol. 149. - P. 25.
17. Papoyan V.V., Sedrakyan, D. M., Chubaryan E.V. Newtonian theory of rapidly rotating white dwarfs // Astrophysics. - 1971. - Vol. 7. - Issue 1. -P.55-61.
18. Harrison B., Thorne K., Wakano M., Wheeler J. Gravitation Theory and Gravitational Collapse. Cambridge: Cambridge University Press. -1965.
19. Chandrasekhar S., Roberts P. The Ellipticity of a Slowly Rotating Configuration // Astrophysical Journal. - 1963. – Vol. 138. – P. 801.
20. Hartle J. B. Slowly Rotating Relativistic Stars. IX: Moments of Inertia of Rotationally Distorted Stars // Astrophysics and Space Science. - 1973. – Vol. 24. – P. 385-405.