

РАСЧЕТ ПОТЕНЦИАЛА α - ${}^6\text{Li}$ -ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В КЛАСТЕРНОЙ ФОЛДИНГ-МОДЕЛИ

Н.А. Буркова, М.А. Жусупов, Р.С. Кабатаева

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, НИИЭТФ, г. Алматы

В настоящей работе представлены результаты аналитического и численного расчета потенциала α - ${}^6\text{Li}$ -взаимодействия в кластерной фолдинг-модели, когда ядро-мишень имеет кластерную структуру ${}^6\text{Li}\{\alpha d\}$.

1. Введение

Реакции радиационного захвата α -частиц изотопами ${}^{6,7}\text{Li}$ с образованием монохроматических γ -квантов представляют существенное значение для разнообразных приложений ядерной физики, в особенности, для астрофизики и проблемы управляемого термоядерного синтеза [1]. Данные реакции представляют большой интерес в связи с возможностью их использования для ядерно-физической диагностики ионного компонента горячей плазмы. Ядро ${}^6\text{Li}$ – важный компонент конструктивных элементов термоядерного реактора, и нахождение различных характеристик этих реакций в низкоэнергетичной области является целью множества экспериментальных и теоретических исследований [2]. Поэтому нахождение надежного потенциала взаимодействия α -частиц с изотопами ${}^{6,7}\text{Li}$ имеет большое значение. Весьма удобным универсальным средством для решения этой задачи является модель свертки или кластерная фолдинг-модель, а именно самосогласованный подход этой модели, предложенный в [3]. Ядро ${}^6\text{Li}$ представляется в виде αd -системы, что обусловлено аномальной малостью энергии связи по данному каналу $\varepsilon_{\alpha d} = 1,475$ МэВ.

2. Аналитические расчеты

Выбор координат Якоби

Поскольку ядро мишень ${}^6\text{Li}$ выбирается как совокупность кластеров α и d , то выбор относительных координат Якоби для системы взаимодействующих частиц α - ${}^6\text{Li}$ будет иметь следующий вид, представленный на рисунке 1.

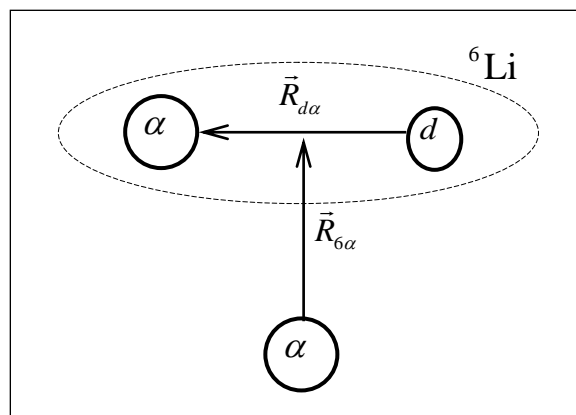


Рис. 1. Относительные координаты Якоби для системы α - ${}^6\text{Li}\{\alpha d\}$. T-набор: $\{\bar{R}_{d\alpha}, \bar{R}_{6\alpha}\}$

Для удобства дальнейших вычислений представим нашу систему через другой, так называемый V-набор координат (рис. 2).

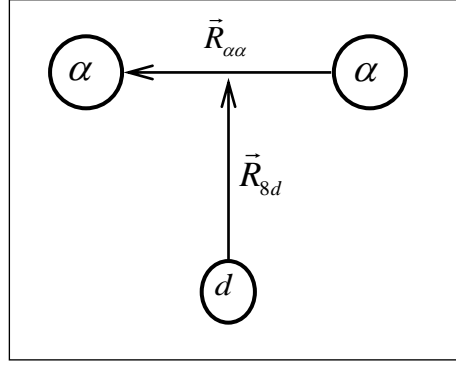


Рис. 2. V-набор: $\{\bar{R}_{\alpha\alpha}, \bar{R}_{8d}\}$ для системы $\alpha - {}^6\text{Li}\{\alpha d\}$

Переходы от одного (Т-) набора координат к другому (V-) набору и наоборот осуществляются следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \bar{R}_{d\alpha} = \frac{1}{2}\bar{R}_{\alpha\alpha} + \bar{R}_{8d} \\ \bar{R}_{6\alpha} = \frac{5}{6}\bar{R}_{\alpha\alpha} - \frac{1}{3}\bar{R}_{8d} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \bar{R}_{\alpha\alpha} = \bar{R}_{6\alpha} + \frac{1}{3}\bar{R}_{d\alpha} \\ \bar{R}_{8d} = \frac{5}{6}\bar{R}_{d\alpha} - \frac{1}{2}\bar{R}_{6\alpha} \end{cases} \quad (2)$$

Напомним, что ядро ${}^6\text{Li}$ имеет следующие квантовые числа полного спина, четности и изоспина в основном состоянии [4]:

$${}^6\text{Li}_{g.s.}(J^\pi, T) = (1^+, 0). \quad (3)$$

Общий вид фолдинг-потенциала

Общий вид вещественной части оптического потенциала α - ${}^6\text{Li}$ -взаимодействия вычисляется как среднее значение по произведению волновых функций основного состояния ядра-мишени и налетающей частицы от суммы парциальных $\alpha\alpha$ - и αd -потенциалов:

$$V_{\alpha {}^6\text{Li}}(\bar{R}_{6\alpha}) = \left\langle \Psi_{jm_j}^{6\text{Li}}(\bar{R}_{d\alpha}) \cdot \Psi_{\alpha} \left| v(\bar{R}_{ad}, \bar{R}_{\alpha\alpha}) \right| \Psi_{jm_j}^{6\text{Li}}(\bar{R}_{d\alpha}) \cdot \Psi_{\alpha} \right\rangle, \quad (4)$$

где потенциал $v(\bar{R}_{ad}, \bar{R}_{\alpha\alpha})$, стоящий между произведениями функций взаимодействующих частиц в выражении (4), есть сумма парциальных $\alpha\alpha$ - и αd -потенциалов (см. рис. 3):

$$v(\bar{R}_{ad}, \bar{R}_{\alpha\alpha}) = v_{ad}(\bar{R}_{ad}) + v_{\alpha\alpha}(\bar{R}_{\alpha\alpha}). \quad (5)$$

Выражение (4) подразумевает интеграл следующего вида:

$$V_{\alpha^6Li}(\vec{R}_{6\alpha}) = \int \Psi_{jm_j}^{6Li}(\vec{R}_{d\alpha}) \cdot \Psi_{\alpha} \cdot v(\vec{R}_{ad}, \vec{R}_{\alpha\alpha}) \cdot \Psi_{jm_j}^{*6Li}(\vec{R}_{d\alpha}) \cdot \Psi_{\alpha}^* d\vec{R}_{d\alpha}. \quad (6)$$

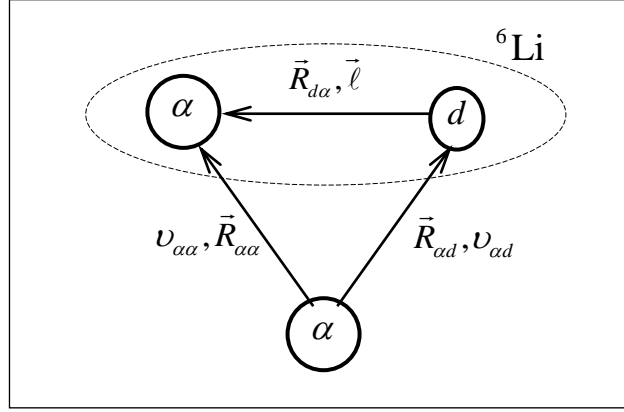


Рис. 3. Выбор парциальных потенциалов

Согласно обозначениям рисунка 3 запишем связь между координатами $\vec{R}_{d\alpha}$ и \vec{R}_{ad} :

$$\vec{R}_{ad} = \frac{3}{2} \vec{R}_{d\alpha} + \frac{3}{2} \vec{R}_{6\alpha}. \quad (7)$$

Учитывая первое выражение из (2) $\vec{R}_{\alpha\alpha} = \vec{R}_{6\alpha} + \frac{1}{3} \vec{R}_{d\alpha}$, запишем потенциал (5):

$$v(\vec{R}_{ad}, \vec{R}_{\alpha\alpha}) = v_{ad}(\vec{R}_{ad}) + v_{\alpha\alpha} \left(\vec{R}_{6\alpha} + \frac{1}{3} \vec{R}_{d\alpha} \right). \quad (8)$$

Подставляя (7) в (8), получим окончательно:

$$v(\vec{R}_{ad}, \vec{R}_{\alpha\alpha}) \rightarrow v(\vec{R}_{d\alpha}, \vec{R}_{6\alpha}) = v_{ad} \left(\frac{3}{2} \vec{R}_{d\alpha} + \frac{3}{2} \vec{R}_{6\alpha} \right) + v_{\alpha\alpha} \left(\vec{R}_{6\alpha} + \frac{1}{3} \vec{R}_{d\alpha} \right). \quad (9)$$

Заметим, что орбитальный момент относительного движения кластеров α и d в ядре ${}^6\text{Li}$ равен $\ell = 0$.

Волновые функции

Запишем волновую функцию ядра-мишени ${}^6\text{Li}$ в основном состоянии:

$$\begin{aligned} \Psi_{jm_j}^{6Li}(\vec{R}_{d\alpha}) = & \sum_{m_\ell, m_{s_d}} (\ell m_\ell s_d m_{s_d} | jm_j) \cdot Y_{\ell m_\ell}(\vec{R}_{d\alpha}) \cdot \Phi_{000}(\alpha) \chi_{00}^{(\sigma)}(\alpha) \times \\ & \times \chi_{00}^{(\tau)}(\alpha) \chi_{00,00}^{(\sigma,\tau)}(\alpha) \cdot \Phi(d) \chi_{1m_{s_d}}^{(\sigma)}(d) \chi_{10}^{(\tau)}(d) \chi_{1m_d,10}^{(\sigma,\tau)}(d) \cdot \sum_j C_j e^{-\alpha_j \vec{R}_{d\alpha}^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где коэффициенты разложения C_j и α_j берутся из [5].

Тогда волновая функция (10) примет следующий вид:

$$\Psi_{1m_j}^{6Li}(\vec{R}_{d\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{m_{s_d}} (001m_{s_d} | 1m_j) \Phi_{000}(\alpha) \chi_{00}^{(\sigma)}(\alpha) \times \\ \times \chi_{00}^{(\tau)}(\alpha) \chi_{00,00}^{(\sigma,\tau)}(\alpha) \cdot \Phi(d) \chi_{1m_{s_d}}^{(\sigma)}(d) \chi_{10}^{(\tau)}(d) \chi_{1m_{s_d},10}^{(\sigma,\tau)}(d) \cdot \sum_j C_j e^{-\alpha_j \vec{R}_{d\alpha}^2}. \quad (11)$$

Выбор парциальных потенциалов взаимодействия

Парциальные потенциалы в (9) берем в гауссовской форме.

Для αd -взаимодействия имеем потенциал вида:

$$v_{\alpha d} \left(\frac{3}{2} \vec{R}_{d\alpha} + \frac{3}{2} \vec{R}_{6\alpha} \right) = V_1 e^{-\alpha_1 \left(\frac{3}{2} \vec{R}_{d\alpha} + \frac{3}{2} \vec{R}_{6\alpha} \right)^2}, \quad (12)$$

где параметры потенциала берутся из [5] и имеют следующие численные значения:

$$V_1 = -75.8469155 \text{ МэВ}, \quad \alpha_1 = 0.2 \text{ фм}^{-2}. \quad (13)$$

Для $\alpha\alpha$ -взаимодействия потенциал будет следующий (так называемый потенциал Бака)[6]:

$$v_{\alpha\alpha} \left(\vec{R}_{6\alpha} + \frac{1}{3} \vec{R}_{d\alpha} \right) = V_2 e^{-\alpha_2 \left(\vec{R}_{6\alpha} + \frac{1}{3} \vec{R}_{d\alpha} \right)^2}, \quad (14)$$

где параметры потенциала мы берем из [7] и они равны

$$V_2 = -129 \text{ МэВ}, \quad \alpha_2 = 0.225 \text{ фм}^{-2}. \quad (15)$$

Теперь с учетом выражения (11) запишем интеграл (6) для собственно потенциала, при этом помним, что пространственные, спиновые, изоспиновые и спин-изоспиновые волновые функции обеих α -частиц и дейтрона сворачиваются по соответствующим переменным интегрирования, и окончательно получим следующее выражение для фолдинг-потенциала:

$$V_{\alpha^6Li}(\vec{R}_{6\alpha}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m_{s_d}, m'_{s_d}} (001m_{s_d} | 1m_j) (001m'_{s_d} | 1m'_j) \sum_{jm} C_j C_m \int e^{-(\alpha_j + \alpha_m) \vec{R}_{d\alpha}^2} v(\vec{R}_{d\alpha}, \vec{R}_{6\alpha}) d\vec{R}_{d\alpha} \quad (16)$$

Произведение двух коэффициентов Клебша-Гордана в выражении (16) даст нам произведение двух символов Кронекера [8]. Теперь подставим выражения для парциальных потенциалов (12) и (14) в потенциал (16):

$$V_{\alpha^6Li}(\vec{R}_{6\alpha}) = \frac{1}{4\pi} \delta_{m_{s_d}, m'_j} \delta_{m'_{s_d}, m'_j} \sum_{jm} C_j C_m \int e^{-(\alpha_j + \alpha_m) \vec{R}_{d\alpha}^2} \cdot \left(V_1 e^{-\alpha_1 \left(\frac{3}{2} \vec{R}_{d\alpha} + \frac{3}{2} \vec{R}_{6\alpha} \right)^2} + V_2 e^{-\alpha_2 \left(\vec{R}_{6\alpha} + \frac{1}{3} \vec{R}_{d\alpha} \right)^2} \right) d\vec{R}_{d\alpha}. \quad (17)$$

Обозначим интеграл в выражении (17):

$$I = \int e^{-(\alpha_j + \alpha_m) \bar{R}_{d\alpha}^2} \cdot \left(V_1 e^{-\alpha_1 \left(\frac{3}{2} \bar{R}_{d\alpha} + \frac{3}{2} \bar{R}_{6\alpha} \right)^2} + V_2 e^{-\alpha_2 \left(\bar{R}_{6\alpha} + \frac{1}{3} \bar{R}_{d\alpha} \right)^2} \right) d\bar{R}_{d\alpha} \quad (18)$$

и разобьем его на два интеграла:

$$I_1 = V_1 \int e^{-(\alpha_j + \alpha_m) \bar{R}_{d\alpha}^2 - \alpha_1 \left(\frac{3}{2} \bar{R}_{d\alpha} + \frac{3}{2} \bar{R}_{6\alpha} \right)^2} d\bar{R}_{d\alpha}, \quad (19)$$

$$I_2 = V_2 \int e^{-(\alpha_j + \alpha_m) \bar{R}_{d\alpha}^2 - \alpha_2 \left(\bar{R}_{6\alpha} + \frac{1}{3} \bar{R}_{d\alpha} \right)^2} d\bar{R}_{d\alpha}. \quad (20)$$

Введем в интегралах (19) и (20) обозначения для удобства записей:

$$(\alpha_j + \alpha_m) \equiv f, \quad \bar{R}_{d\alpha} \equiv \bar{R} \quad (21)$$

и перепишем их заново:

$$I_1 = V_1 \int e^{-\left(f \bar{R}^2 + \alpha_1 \left(\frac{3}{2} \bar{R} + \frac{3}{2} \bar{R}_{6\alpha} \right)^2 \right)} d\bar{R}, \quad (22)$$

$$I_2 = V_2 \int e^{-\left(f \bar{R}^2 + \alpha_2 \left(\bar{R}_{6\alpha} + \frac{1}{3} \bar{R} \right)^2 \right)} d\bar{R}. \quad (23)$$

Диагонализация квадратичной формы

Для взятия интегралов (22) и (23) необходимо диагонализировать квадратичную форму в показателях подынтегральных экспонент.

Преобразуем показатель экспоненты в интеграле (22):

$$t \equiv f \bar{R}^2 + \alpha_1 \left(\frac{3}{2} \bar{R} + \frac{3}{2} \bar{R}_{6\alpha} \right)^2 = \left(f + \frac{9}{4} \alpha_1 \right) \bar{R}^2 + \frac{9}{2} \alpha_1 \bar{R} \bar{R}_{6\alpha} + \frac{9}{4} \alpha_1 \bar{R}_{6\alpha}^2. \quad (24)$$

В (24) введем обозначения:

$$a_1 \equiv f + \frac{9}{4} \alpha_1, \quad a_2 \equiv \frac{9}{2} \alpha_1, \quad a_3 \equiv \frac{9}{4} \alpha_1. \quad (25)$$

Следовательно,

$$t = a_1 \bar{R}^2 + a_2 \bar{R} \bar{R}_{6\alpha} + a_3 \bar{R}_{6\alpha}^2. \quad (26)$$

Введем замену переменных:

$$\begin{cases} \bar{R}_{6\alpha} = \bar{R} \\ \bar{R} = \bar{x}_1 + \alpha \bar{R}_{6\alpha} \end{cases} \quad (27)$$

Подставим (27) в (26):

$$\begin{aligned}
t &= a_1 (\bar{x}_1 + \alpha \bar{R}_{6\alpha})^2 + a_2 (\bar{x}_1 + \alpha \bar{R}_{6\alpha}) \bar{R}_{6\alpha} + a_3 \bar{R}_{6\alpha}^2 = \\
&= a_1 \bar{x}_1^2 + (2a_1 \alpha + a_2) \bar{x}_1 \bar{R}_{6\alpha} + (a_1 \alpha^2 + a_2 \alpha + a_3) \bar{R}_{6\alpha}^2. \quad (28)
\end{aligned}$$

Для диагонализации квадратичной формы нужно положить коэффициент при перекрестном слагаемом в (28) равным нулю:

$$2a_1 \alpha + a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{a_2}{2a_1}. \quad (29)$$

Теперь с учетом (29) найдем коэффициент при $\bar{R}_{6\alpha}^2$ в выражении (28):

$$q_1 \equiv a_1 \alpha^2 + a_2 \alpha + a_3 = a_3 - \frac{a_2^2}{4a_1}. \quad (30)$$

Тогда выражение (28) с учетом (30) примет вид:

$$t = a_1 \bar{x}_1^2 + q_1 \bar{R}_{6\alpha}^2 \quad (31)$$

Таким образом, мы диагонализовали квадратичную форму (24) и привели ее к виду (31).

Аналогично для квадратичной формы в показателе экспоненты интеграла (23). Здесь мы не будем приводить деталей процедуры, а запишем окончательное выражение для диагонализированной формы:

$$h \equiv f \bar{R}^2 + \alpha_2 \left(\bar{R}_{6\alpha} + \frac{1}{3} \bar{R} \right)^2 = b_1 \bar{x}_1^2 + p_1 \bar{R}_{6\alpha}^2, \quad (32)$$

где введены следующие обозначения:

$$b_1 \equiv f + \frac{1}{9} \alpha_2, \quad b_2 \equiv \frac{2}{3} \alpha_2, \quad b_3 \equiv \alpha_2, \quad (33)$$

$$p_1 \equiv b_3 - \frac{b_2^2}{4b_1} \quad (34)$$

Теперь с учетом (31) и (32) можно с легкостью проинтегрировать выражения (22) и (23). При этом учтем, что $\bar{R} = \bar{x}_1 + \alpha \bar{R}_{6\alpha}$ и, следовательно,

$$d\bar{R} = d\bar{x}_1 = x_1^2 dx_1 d\Omega_{x_1} \quad (35)$$

А также табличный интеграл:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha r^2} r^2 dr = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{3/2}}. \quad (36)$$

$$I_1 = V_1 \int_0^\infty e^{-(a_1 \bar{x}_1^2 + q_1 \bar{R}_{6\alpha}^2)} x_1^2 dx_1 \int_0^{2\pi} d\Omega_{x_1} = \frac{V_1 \pi \sqrt{\pi}}{a_1^{3/2}} e^{-q_1 \bar{R}_{6\alpha}^2}. \quad (37)$$

$$I_2 = V_2 \int_0^\infty e^{-(b_1 \bar{x}_1^2 + p_1 \bar{R}_{6\alpha}^2)} x_1^2 dx_1 \int_0^{2\pi} d\Omega_{x_1} = \frac{V_2 \pi \sqrt{\pi}}{b_1^{3/2}} e^{-p_1 \bar{R}_{6\alpha}^2}. \quad (38)$$

Теперь запишем полный интеграл (18), который есть сумма двух интегралов (37) и (38):

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V_1 \pi \sqrt{\pi}}{a_1^{3/2}} e^{-q_1 \bar{R}_{6\alpha}^2} + \frac{V_2 \pi \sqrt{\pi}}{b_1^{3/2}} e^{-p_1 \bar{R}_{6\alpha}^2} = \pi \sqrt{\pi} \left\{ \frac{V_1}{a_1^{3/2}} e^{-q_1 \bar{R}_{6\alpha}^2} + \frac{V_2}{b_1^{3/2}} e^{-p_1 \bar{R}_{6\alpha}^2} \right\}. \quad (39)$$

Таким образом, можем записать окончательный результат для вещественной части фолдинг-потенциала $\alpha - {}^6\text{Li}$ -взаимодействия (17) в аналитическом виде:

$$V_{\alpha {}^6\text{Li}}(\bar{R}_{6\alpha}) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \delta_{m_s, m_j} \delta_{m'_s, m'_j} \sum_{jm} C_j C_m \left\{ \frac{V_1}{a_1^{3/2}} e^{-q_1 \bar{R}_{6\alpha}^2} + \frac{V_2}{b_1^{3/2}} e^{-p_1 \bar{R}_{6\alpha}^2} \right\}, \quad (40)$$

где все параметры определяются выражениями (13), (15), (21), (25), (30), (33), (34).

3. Результаты численных расчетов

Перепишем выражение (40) следующим образом (удобным для программирования):

$$V_{\alpha {}^6\text{Li}}(\bar{R}_{6\alpha}) = \frac{V_1 \sqrt{\pi}}{4} \sum_{jm} C_j C_m \frac{1}{a_1^{3/2}} e^{-q_1 \bar{R}_{6\alpha}^2} + \frac{V_2 \sqrt{\pi}}{4} \sum_{jm} C_j C_m \frac{1}{b_1^{3/2}} e^{-p_1 \bar{R}_{6\alpha}^2} = V_1 + V_2. \quad (41)$$

На рисунке 4 представлены результаты численного расчета реальной части компонентов потенциала и полного потенциала по формуле (41) в интервале от 0 до 8 ферми.

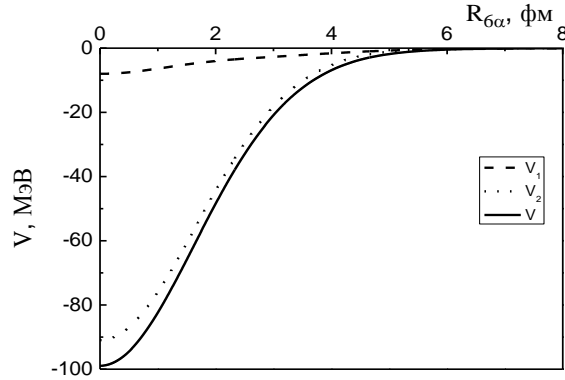


Рис. 4. Реальная часть потенциала $\alpha - {}^6\text{Li}$ взаимодействия, рассчитанного в кластерной фолдинг-модели

На рисунке 5 представлены реальные части потенциалов взаимодействия рассматриваемой системы, рассчитанные в настоящей работе и другими авторами. В работе [2] авторы рассматривали трехтелую модель ядра ${}^6\text{Li}\{\alpha np\}$.

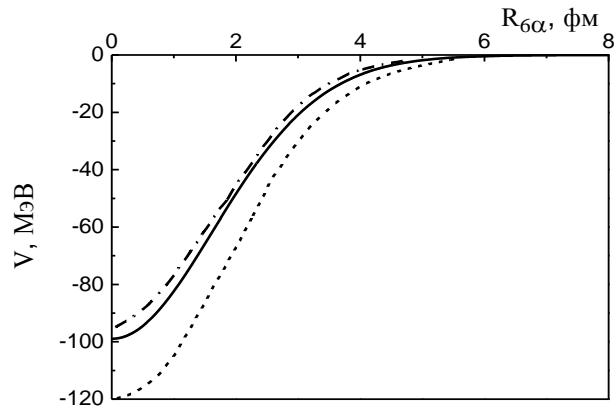


Рис. 5. Потенциалы $\alpha - {}^6\text{Li}$ взаимодействия:
сплошная - результат настоящей работы, штриховая - результат работы [2], штрих-пунктирная - [9]

Литература

1. Буркова Н.А., Жусупов М.А., Кабатаева Р.С. Потенциальное описание рассеяния α -частиц на изотопах ${}^6\text{Li}$ и ${}^7\text{Li}$ // Вестник КазНУ. Сер. физ. 2010. №4(35). С. 9-15.
2. Kamal M., Voronchev V.T., Kukuljin V.I., Krasnopolsky V.M., Nakao Y. and Kudo K. Self-consistent calculation of the interactions of lightest nuclei with ${}^6\text{Li}$ // J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 18 (1992) P. 379-392.
3. Камаль М., Ворончев В.Т., Кукулин В.И. Самосогласованный расчет потенциалов взаимодействия нуклонов и дейтронов с ядром ${}^6\text{Li}$ // Вопросы атомной науки и техники, серия «Ядерные константы». 1986. P4-88-799. С. 1-19.
4. Tilley D.R. et. al. Energy levels of light nuclei. A=6. // Nucl. Phys. A708 (2002) 3. P. 18.
5. Дубовиченко С.Б. Астрофизические S-факторы радиационного ${}^3\text{He}^4\text{He}$, ${}^3\text{H}^4\text{He}$ и ${}^2\text{H}^4\text{He}$ -захвата // ЯФ. 2010. т. 73. №9. С. 1573-1584.
6. Buck B., Friedrich H. and Wheatley C., Local Potential models for the scattering of complex nuclei, Nucl. Phys., A275, 1975, P. 246-268.
7. Ворончев В.Т., Кукулин В.И. и др. // ЯФ. 1994. Т.57. N11. С.1964.
8. Варшалович Д.А. и др. Квантовая теория углового момента. Изд-во «Наука», Ленингр. отд., Л., 1975. 439 с.
9. Bacheller D., Bernas M., Boyard J.L., Harney H.L., Jourdain J.C., Radvanyi P. and Roy-Stephan M. 1972. Nucl. Phys. A 195. 361-8.

КЛАСТЕРЛІК ФОЛДИНГ-МОДЕЛІНДЕГІ $\alpha {}^6\text{Li}$ -ПОТЕНЦІАЛЫН ЕСЕПТЕУ

Н.А. Буркова, М.Ә. Жүсіпов, Р.С. Кабатаева

Нақты жұмыста кластерлік фолдинг-моделіндегі нысана-ядро ${}^6\text{Li}\{\alpha d\}$ кластерлік құрамын иеленген кезінде $\alpha {}^6\text{Li}$ -потенциалының аналитикалық және сандық есептеулері келтірілген.

CALCULATION OF $\alpha {}^6\text{Li}$ -INTERACTION POTENTIAL IN THE CLUSTER FOLDING-MODEL

N.A. Burkova, M.A. Zhusupov, R.S. Kabatayeva

In the present article the results of analytical and numerical calculations of $\alpha {}^6\text{Li}$ -interaction potential in the cluster folding-model are represented, when the target-nucleus has the cluster ${}^6\text{Li}\{\alpha d\}$ structure.