FTAMP 14.35.09; 30.15.15 https://doi.org/10.26577/RCPh96120269

Б.С. Желдыбаева[1], Г.Р. Кощанова[2], А.Г. Амангосова[3],
Б.А. Джугембаева[3], Г.Б. Туребаева[4], А.Қ. Қасымханова[4],
Ш.Ж. Сырбаева[3], Л.С. Каинбаева[5], Б.А. Мұқұшев[6*]
[1]Семей қаласындағы Шәкәрім атындағы мемлекеттік университет, Семей, Қазақстан
[2]Ш.Есенов атындағы Каспий технологиялар және инжиниринг университеті, Ақтау, Қазақстан
[3]Х. Досмұхамедов атындағы Атырау университеті, Атырау, Қазақстан
[4]Ә. Сағынов атындағы Қарағанды техникалық университеті, Қарағанды, Қазақстан
[5]Қорқыт Ата атындағы Қызылорда университетін, Қызылорда, Қазақстан
[6]С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық зерттеу университеті, Астана, Қазақстан
*e-mail: mba-55@mail.ru

MATHCAD ПАКЕТІ КӨМЕГІМЕН ПЕРИОДТЫ ЭЛЕКТРЛІК СИГНАЛДАРҒА ГАРМОНИКАЛЫҚ ТАЛДАУ ЖАСАУ

Мақалада гармониялық емес периодты электрлік тербелістерін Фурье қатарына жіктеу әдісімен жасалған талдаулар қарастырылған. Тербелмелі процестерді сипаттайтын жұп және тақ функциялардың жіктелу ерекшеліктері жан-жақты талданды. Функцияны Фурье қатарына жіктеу процедураларының кезеңдерінің көрнекілігін қамтамасыз ету үшін математикаға қатысты мысалдар келтірілген. Қарастырылған мысалдар Mathcad қолданбалы бағдарламалар пакеті көмегімен графикалық және сандық түрде зерттелген.

Mathcad қолданбалы бағдарламалар пакеті арқылы периодты гармониялық емес электр тоғының немесе сигналдардың Фурье қатарына жіктеуге арналған мысалдары қарастырылады. Есептеу эксперименттері көмегімен гармониялық емес периодты токтардың немесе сигналдардың графикалық, сандық және аналитикалық шешімдері алынды. Бірнеше кезеңнен тұратын гармониялық емес периодты сигналдар үшін Фурье қатарының мүшелерінің қосындысын есептеу әдістері ұсынылған.

Синусоидалы (немесе косинусоидалы) емес периодты токтарды сипаттайтын күрделі жұп және тақ функциялардың сол токтардың жиілік спектрін құрайтын қарапайым гармониялық электр тербелістерінің қосындысынан тұратыны көрсетілді. Периодты сигналдардың жуықтау (аппроксимация) нәтижелері $(-\pi, \pi)$ интервалында Фурье қатары түрінде берілген. Электрлік сигналдардың Фурье қатарына жіктелген және осы қатардың алғашқы екі және төрт мүшесінің қосындысы алынған. Сигналдардың қатарға жіктелген мүшелерінің саны көп болған сайын осы мүшелер зерттеліп отырған сигналды нақтырақ сипаттайтыны дәлелденді.

Түйін сөздер: Фурье қатары, жұп және тақ функциялар, mathcad қолданбалы бағдарламалар пакеті, гармониялық емес электрлік сигналдар, есептеу эксперименті, аппроксимация, графикалық, сандық және аналитикалық шешімдер.

B.S. Zheldybayeva[1], G.R. Koshchanova[2], A.G. Amangosova[3],
B.A. Dzhugembayeva[3], G.B. Turebayeva[4], A.K. Kasymkhanova[4],
Sh.J. Syrbaeva[3] L.S. Kainbayeva[5], B.A. Mukushev[6*]
[1]Shakarim state university, Semey, Kazakhstan
[2]Sh. Yesenov Caspian university of technology and engineering, Aktau, Kazakhstan
[3]Kh. Dosmukhamedov Atyrau university, Atyrau, Kazakhstan
[4]A.Saginov Karaganda technical university, Karaganda, Kazakhstan
[5]Korkyt Ata Kyzylorda university, Kyzylorda, Kazakhstan
[6]S. Seifullin Kazakh agrotechnical research university, Astana, Kazakhstan
*e-mail: mba-55@mail.ru

Harmonic analysis of a periodic electrical signal using the Mathcad package

The article considers the harmonic analysis of periodic non-sinusoidal oscillations by Fourier series expansion. The features of decomposition of even and odd functions are revealed. Based on the symbolic method, the Fourier series was presented in a complex form. Examples are presented to provide clarity of the steps of the procedures for decomposing a function into a Fourier series.

Examples of Fourier series decomposition of periodic non-sinusoidal electric currents or signals using the Mathcad application software package are considered. Graphical, numerical, and analytical solutions of non-sinusoidal periodic currents or signals have been obtained using computational experiments. Methods for calculating the sum of the terms of the Fourier series for non-sinusoidal periodic signals, which consist of several stages, are presented.

It has been proven that complex even and odd functions describing periodic currents that are not sinusoidal (or cosine-shaped) consist of the sum of simple harmonic electrical oscillations. These fluctuations make up the frequency spectrum of these currents. The results of the approximation of periodic signals are presented as a Fourier series over the interval (-π, π). Electrical signals are classified into a Fourier series, and the sum of the first two and four terms of this series is obtained. It has been shown that the more members of the signals classified in a row, these members more accurately describe the signal under study.

Keywords: Fourier series, even and odd functions, Mathcad application software package, inharmonic electrical signals, computational experiment, approximation, graphical, numerical and analytical solutions.

Б.С. Желдыбаева[1], Г.Р. Кощанова[2], А.Г. Амангосова[3], Б.А. Джугембаева[3], Г.Б. Туребаева[4], А.К. Касымханова[4], Ш.Ж. Сырбаева[3], Л.С. Каинбаева[5], Б.А. Мукушев[6*]

[1]Государственный университет имени Шакарима, Семей, Казахстан

[2]Каспийский университет технологий и инжиниринга имени Ш. Есенова, Актау, Казахстан

[3]Атырауский университет им. Х. Досмухамедова, Атырау, Казахстан

[4]Карагандинский технический университет имени А. Сагинова, Караганда, Казахстан

[5]Кызылординский университет имени Коркыт Ата, Кызылорда, Казахстан

[6]Казахский агротехнический исследовательский университет имени С.Сейфуллина, Астана, Казахстан

*e-mail: mba-55@mail.ru

Гармонический анализ периодического электрического сигнала с помощью пакета Mathcad

В статье рассмотрен гармонический анализ периодических несинусоидальных колебаний путем разложения в ряд Фурье. Раскрыты особенности разложения четных и нечетных функций. На основе символического метода ряд Фурье был представлен в комплексной форме. Представлены примеры для обеспечения наглядности этапов процедур разложения функции в ряд Фурье.

Рассмотрены примеры на разложение в ряд Фурье периодических несинусоидальных электричесих токов или сигналов с помощью пакета прикладных программ Mathcad. Получены графические, численные и аналитические решения несинусоидальных периодических токов или сигналов с помощью вычислительных экспериментов. Представлены методы расчета суммы членов ряда Фурье для несинусоидальных периодических сигналов, которые состоят из нескольких этапов.

Было показано, что сложные четные и нечетные функции, описывающие периодические токи, которые не являются синусоидальными (или косинусоидальными), состоят из суммы простых гармонических электрических колебаний. Эти колебания составляют частотный спектр этих токов. Результаты аппроксимации периодических сигналов представлены в виде ряда Фурье на интервале (-π, π). Электрические сигналы классифицируются в ряд Фурье, и получается сумма первых двух и четырех членов этого ряда. Было показано, что чем больше членов сигналов, классифицированных в ряд, эти члены точнее описывают исследуемый сигнал.

Ключевые слова: ряд Фурье, четные и нечетные функции, пакет прикладных программ Mathcad, негармонические электрические сигналы, вычислительный эксперимент, аппроксимация, графические, численные и аналитические решения.

Кіріспе

Қарапайым гармоникалық тербелістер келесі функциямен сипатталады

$$s = Asin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

мұнда гармониялық тербелістердің негізгі параметрлері: s – тербелмелі материалдық нүктенің тепе - теңдік күйінен ауытқуы, t - уақыт, A – гармоникалық тербелістердің амплитудасы, ω – циклдік жиілік және φ_0 – нүктенің бастапқы фазасы. Тербеліс периоды $T = \frac{2\pi}{\omega}$ формуласы бойынша анықталады.

$Asin(\omega_0 t + \varphi_0)$ функциясы қарапайым гармоника деп аталады. Бірнеше қарапайым гармониялық тербелістердің қабаттасуынан туындайтын тербелістер күрделі тербелістер деп аталады. Әр түрлі параметрлері бар бірнеше қарапайым гармониялық тербелістердің қабаттасуы гармоникалық тербелістерге ұқсамайтын периодты тербелмелі қозғалыстар тудыратыны белгілі. Мұнда келесі мазмұндағы кері мәселе туындайды: нүктенің периодты түрдегі қозғалысын күрделі гармоникалық тербеліс ретінде елестетуге болады ма?

Математикалық есептеулер бұл жағдайдың қарапайым гармониканың шектеулі жиынтығында мүмкін еместігін дәлелдеді. Қарапайым гармоникалардың шексіз қосындыларын талдау кезінде кез-келген периодты функцияны қарапайым гармоникаға бөлуге болатындығы белгілі болды. Бұл мәселені француз математигі және физигі Дж. Б. Фурье шешті (1768-1830). Ғалым белгілі бір уақытқа тәуелді функцияның кез-келген өзгерісті бірқатар гармоникалық тербелістердің шекті немесе шексіз қосындысы ретінде ұсынуға болатындығын дәлелдеді. Бұл тербелістердің амплитудасы, жиілігі және бастапқы фазалары әртүрлі болады. Осылайша, нүктенің күрделі периодты тербелістерін гармоникалық тербеліс-тер жиынтығы ретінде ұсынуға болады.

Периодты функцияларды Фурье қатарына жіктеу

($-\pi$, π) интервалда берілген периодты $f(x)$ қарастырмыз. Бұл функция Дирихле шарттарын қанағаттандырсын. Демек, бұл функция шектеулі және бір период интервалында экстремумдар мен үзілістердің шектеулі санына ие болады. Фурье теоремасына сәйкес, қарастырылып отырған функция Фурье қатары деп аталатын тригонометриялық қатар түрінде болады [1, 2]:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \quad (1)$$

(1)-теңдеуді мына түрде жаза аламыз:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx - \varphi_n), \qquad (2)$$

мұнда $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ – n-ші гармоника амплитудасының модулі және $\varphi_n = argtg\frac{b_n}{a_n}$ – n-ші гармоника фазасы.

Косинусоидалы компоненттердің коэффи-циенттері:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx. \quad (3)$$

Синусоидалы компоненттердің коэффи-циенттері:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \quad (4)$$

функцияның бір период интервалындағы орташа мәні (тұрақты компонент):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \quad (5)$$

Бұл қатарлардың жеке мүшелері гармоника деп аталады. Мұнда n саны гармоника нөмірі болады. (2) қатардағы A_n шамаларының жиыны амплитудалық спектр деп аталады, ал шамалар жиыны φ_n – фазалық спектр деп аталады. Егер $f(x)$ функциясы жұп болса, онда (1) қатар қосындысы тек косинусоидалы компоненттерден тұрады. Егер $f(x)$ тақ функция болса, онда қосындыда тек синусоидалы компоненттер ғана болады.

Mathcad пакетін қолдана отырып, периодты функцияларды Фурье қатарына ыдырату процедурасын көрсететін математикаға қатысты мысалдарды қарастырамыз.

Мысал 1. Біз (-π, π) интервалында анықталған $f(x)$ функциясын Фурье қатарына жіктейміз:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Бұл функцияның графигі 1-суретте көрсетілген.

Функция тақ болғандықтан барлық $a_n = 0$. Біз b_n коэффициентін табамыз. (4)-теңдеуге сәйкес

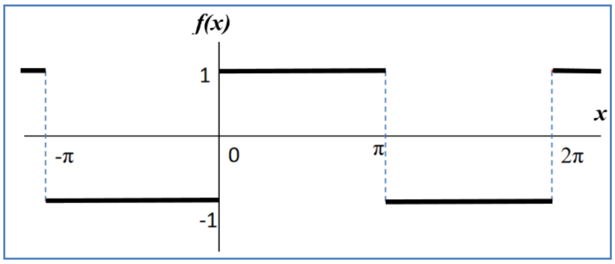
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\sin(nx)\,dx = -\frac{2}{\pi n}cosnx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n}(1-\cos\pi n).$$

$cos\pi n = (-1)^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, болғандықтан

$$b_1 = \frac{4}{\pi}, b_2 = 0,\ b_3 = \frac{4}{3\pi}, b_4 = 0, b_5 = \frac{4}{5\pi}$$ және т.б.

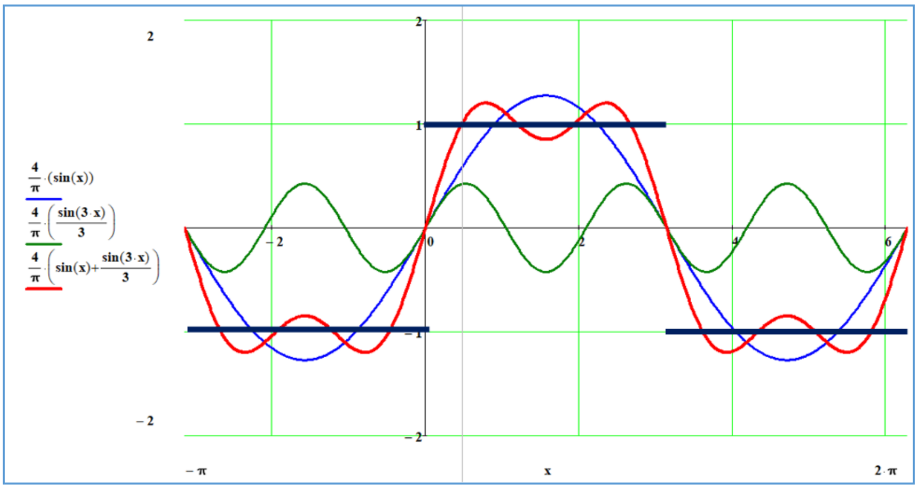
Сонымен,

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right).$$



1-сурет. Периодтты бірлік функция

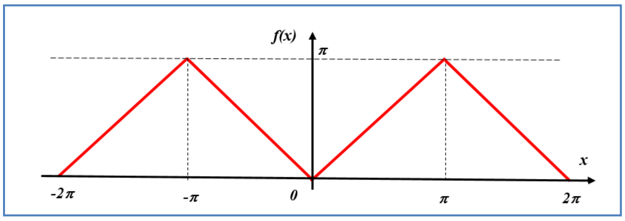
2-суретте $\frac{4}{\pi}\sin x$, $\frac{4}{3\pi}\sin 3x$ және $\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x\right)$ фунциялардың графиктері берілген. Қарапайым гармоникалардың неғұрлым көп қосындысын алсақ, соғұрлым алынған қосынды гармоника $f(x)$ функциясын толығырақ сипаттайды.



2-сурет. $\frac{4}{\pi}\sin x, \frac{4}{3\pi}\sin 3x$ және $\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x\right)$ фунциялардың графиктері

Мысал 2. $f(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$ функциясын Фурье қатарына жіктеу керек. Бұл функцияның графигінің бөлігі 3-суретте көрсетілген.

$f(x)$ функциясы жұп екені белгілі, демек барлық коэффициенттер $b_n = 0$.



3-сурет. $f(x) = |x|$, функциясын графигі

(5)-формула бойынша:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x cosnx\,dx.$ Бөліктер бойынша интегралдай отырып:

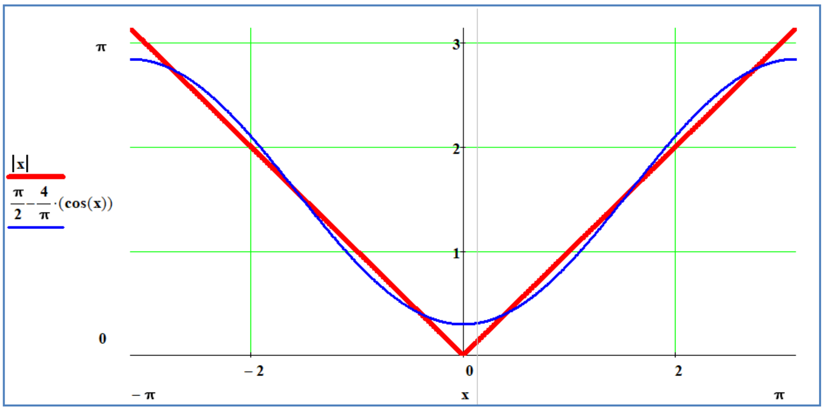
$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{xsinnx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{sinnx}{n}dx\right] =$$
$$= \frac{2}{\pi n^2}cosnx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}(cosnx - 1).$$

Бұдан

$$a_1 = -\frac{4}{\pi}, a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{4}{3^2\pi}, a_4 = 0,$$
$$a_5 = \frac{4}{5^2\pi} \text{ және т.б.}$$

Сонымен, $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\Big(cosx + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\Big).$

$f(x)$ функциясының Фурье қатарына жіктеу кезіндегі алынған бірінші функциясының графигі 4-суретте көрсетілген (көк сызық).



4-сурет. $f(x) = |x|, -\pi < x < \pi$ ункциясының Фурье қатарына жіктеу функциясының графигі

Күрделі периодты функцияны қарапайым гармоникаға Фурье қатары арқылы жіктеудің бірқатар қолданбалы бағыттары бар. Біз төменде Фурье қатарын қолдана отырып, периодты гармониялық емес электр сигналдарының (токтар мен кернеулер) гармоникалық талдауын қарастырмыз.

Mathcad пакетін пайдаланып периодты гармониялық емес токтардың параметрлерін зерттеу

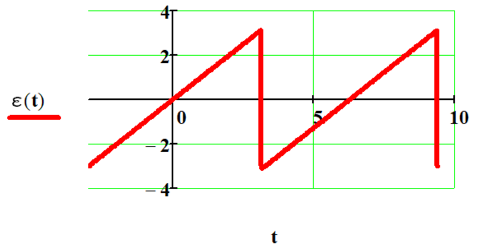
Физика курсында уақыт бойынша ток күші (немесе кернеуі) гармониялық, яғни синусоида (немесе косинусоида) заңы бойынша өзгеретін айнымалы токтар қарастырылады. Алайда, компьютерлік техникада, электротехникада және радиотехникада гармониялық электрлік тербе-лістер болып табылмайтын периодты электр сигналдары, импульстік токтар мен кернеулер кеңінен қолданылады [1-3].

Үздіксіз периодтық функция тригономе-триялық қатармен, яғни гармониялық функциялардың қосындысымен сипатталатыны белгілі. Осылайша, күрделі периодты электрлік тербелістерді (әр түрлі периодты электрлік сигналдар) гармониялық тербелістер жиынтығы ретінде ұсынуға болады [4-7].

Синусоидалы (немесе косинусоидалы) емес периодты токтардың гармоникалық талдауы Фурье қатарына жіктеуге негізделген және электр тогының осы түрін сипаттайтын күрделі функциясын сол токтың жиілік спектрін құрайтын қарапайым гармониялық электр тербелістерінің қосындысынан тұрады.

Функцияның тақ (3-мысал) және жұп (4-мысал) түрлерімен сипатталатын периодты гармониялық емес токтарды қарастырамыз.

Мысал 3. 5-суретте осциллографтың горизонталь ауытқу пластиналарына берілетін уақытқа тәуелді кернеу графигі көрсетілген. 6-суретте осы графикті құруға қажет Mathcad бағдарламасы берілген [8-12].



5-сурет. Кернеудің уақытқа тәуелді графигі

$$\tau := \pi \qquad T := 2\tau \qquad \varepsilon(t) := \begin{vmatrix} t \ \text{ if } -\tau < t \le 0.99\tau \\ -3 \ \text{ if } 0.99\tau < t \le \tau \\ (t - 2\cdot\tau) \ \text{ if } \tau < t \le 2.99\tau \\ (-3) \ \text{ if } 2.99\tau < t \le 3\tau \end{vmatrix}$$

6-сурет. Mathcad ортасындағы бағдарлама

а) Фурье қатарының алғашқы екі және алғашқы жеті мүшесінің қосындысы түріндегі кернеуді ε(t) табу керек;

б) қатардың осы мүшелерінің қосындыларын графикалық түрде беру керек.

Талдау: а) бірнеше кезеңнен тұратын периодты гармониялық емес сигналдар үшін Фурье қатарының мүшелерінің қосындысын есептеу әдісін ұсынамыз.

Алдымен 5-суретте көрсетілген периодты кернеу үшін Фурье қатарының коэффициенттерін табу керек. Ол үшін Mathcad пакетін пайдалана отырып арнайы бағдарламалар жасау керек. Бірінші кезең косинусоидалы компоненттердегі коэффициенттерді, ал екіншісі синусоидалы компоненттерде есептейді (7-сурет).

Үшінші кезең Фурье қатарын тікелей есептейді. Бұл кезең қатардың жіктелу коэффициенттерін есептеудің бұрын жасаған кезеңдерін қамтиды (8-сурет).

Фурье қатарлары символдық түрде есептеледі. Сондықтан, қатар есептелетін жерде айнымалының символдық атауы, ал мәнді есептеу операторы ретінде стрелка көрсетіледі (9-сурет).

$$\mathrm{CFurCoef}(\varepsilon, T, n) := \begin{vmatrix} \varepsilon \leftarrow \dfrac{\left(\displaystyle\int_{-\tau}^{\tau} \varepsilon(t)\cdot\cos\left(\pi\cdot n\cdot\frac{t}{T}\right)dt\right)}{\tau} \\ \varepsilon \end{vmatrix} \qquad \mathrm{SFurCoef}(\varepsilon, T, n) := \begin{vmatrix} \varepsilon \leftarrow \dfrac{\left(\displaystyle\int_{-\tau}^{\tau} \varepsilon(t)\cdot\sin\left(\pi\cdot n\cdot\frac{t}{T}\right)dt\right)}{\tau} \\ \varepsilon \end{vmatrix}$$

7-сурет. Mathcad ортасындағы Фурье қатарының коэффициенттерін табу

$$\mathrm{FurSer}(\varepsilon, t, T, n) := \begin{vmatrix} \varepsilon \leftarrow \dfrac{\mathrm{CFurCoef}(\varepsilon, T, 0)}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{n}\left(\mathrm{CFurCoef}(\varepsilon, T, n)\cdot\cos\left(\pi\cdot n\cdot\frac{t}{T}\right) + \mathrm{SFurCoef}(\varepsilon, T, n)\cdot\sin\left(\pi\cdot n\cdot\frac{t}{T}\right)\right) \\ \varepsilon \end{vmatrix}$$

8-сурет. Mathcad ортасындағы Фурье қатарын жіктелу коэффициенттерін есептеу

$$\varepsilon(t) := t$$

$$\mathrm{FurSer}(\varepsilon, t, \pi, 2) \rightarrow 2\cdot\sin(t) - \sin(2\cdot t)$$

$$\mathrm{FurSer}(\varepsilon, t, \pi, 7) \rightarrow \frac{2\cdot\sin(3\cdot t)}{3} - \sin(2\cdot t) - \frac{\sin(4\cdot t)}{2} + \frac{2\cdot\sin(5\cdot t)}{5} - \frac{\sin(6\cdot t)}{3} + \frac{2\cdot\sin(7\cdot t)}{7} + 2\cdot\sin(t)$$

9-сурет. Фурье қатарын символдық түрде есептеу

Төменде $\varepsilon(t)$ мәні Фурье қатарының алғашқы екі және алғашқы жеті мүшесінің қосындысы ретінде көрсетілген:

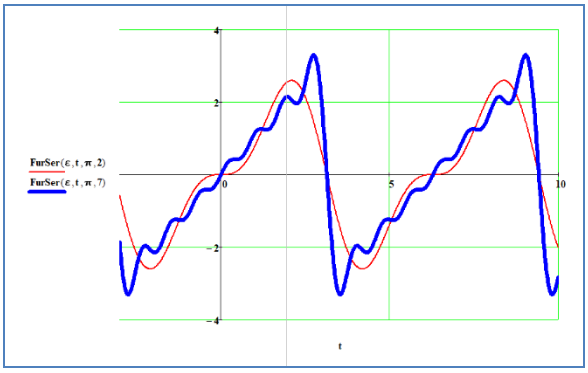
$$\varepsilon(t) \approx 2\sin t - \sin 2t$$

$$\varepsilon(t) \approx 2\sin t - \sin 2t + \frac{2\sin 3t}{3} - \frac{\sin 4t}{2} + \frac{2\sin 5t}{5} - \frac{\sin 6t}{3} + \frac{2\sin 7t}{7}.$$

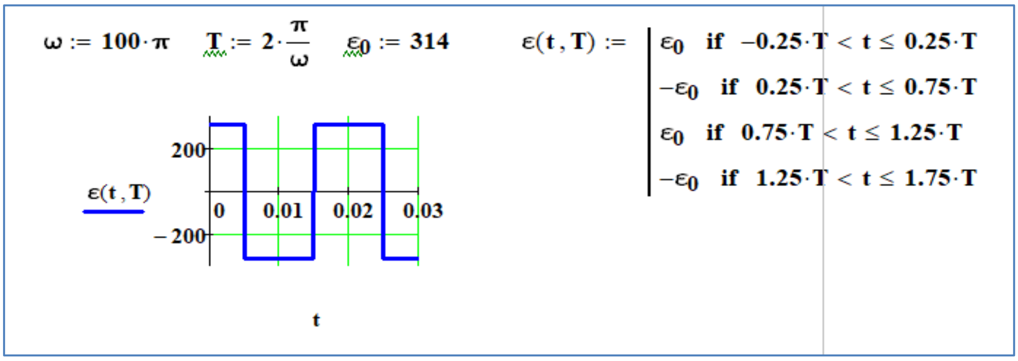
ә) 10-суретте сызықтық функцияның $\varepsilon(t) = t$ жуықтау (аппроксимация) нәтижелері ($-\pi$, π) интервалында Фурье қатары түрінде берілген. Жуықтау екі (жұқа қызыл сызық) және жеті (қалыңдатылған көк сызық) мүшелерден тұратын қатарларымен берілген. Фурье қатарындағы мүшелер санының артуымен жуықтау дәлдігі жоғарылайтыны белгілі.

Мысал 4. Электр тізбегіне периодты гармониялық емес кернеу берілген (11-сурет). Электр тізбегінің элементтерінің параметрлері келесі мәндерге тең: $\varepsilon_0 = 314$ В; $\omega = 100\pi$ рад/с.

Берілген электрлік сигналды Фурье қатарына жіктей отырып, алғашқы екі және алғашқы төрт мүшесінің қосындысы түрінде кернеудің графикалық және сандық шешімін (жуықтауын) табу керек.



10-сурет. $\varepsilon(t) = t$ функциясының графиктік шешімі



11-сурет. Уақытқа байланысты периодты кернеу графигі және оның Mathcad ортасындағы бағдарламасы

Талдау: Ток көзінің кернеуін Фурье қатарына жіктеу үшін біз бағдарламаны Mathcad ортасында жазамыз. Функция $\varepsilon(t)$ жұп болғандықтан Фурье қатарына жіктеу тек косинустарды қамтиды:

$$\varepsilon(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t),$$

$$a_0 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varepsilon(t)dt = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varepsilon(t) \cdot cosn\omega tdt,$$

$$a_n = \frac{4\varepsilon_0}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{4}} cosn\omega tdt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} (-1) cosn\omega tdt\right] = \frac{4\varepsilon_0}{n\pi} sin\frac{n\pi}{2},$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Фурье қатары мынандай түрде болады

$$\varepsilon(t) = \frac{4\varepsilon_0}{\pi}\left(cos\omega t - \frac{1}{3}cos3\omega t + \frac{1}{5}cos5\omega t - \cdots\right).$$

12-суретте Фурье қатарының бірінші мүшесі график түрінде (қызыл сызық) көрсетілген.

$$\varepsilon(t) = \frac{4\varepsilon_0}{\pi} cos\omega t \approx 399{,}797 cos100\pi t, \ a_0 = 0.$$

$N\varepsilon = 4$ шарты бойынша біз келесі қатарды аламыз, онда Фурье қатарының алғашқы екі мүшесінің қосындысы берілген

$$\varepsilon(t) = \frac{4\varepsilon_0}{\pi}\left(cos\omega t - \frac{cos3\omega t}{3}\right), \ a_0 = 0.$$

Бұл қатар 13-суретте көрсетілген графикке және кестеге сәйкес келеді. Кесте деректерін қолдана отырып, соңғы теңдеуді осы формада жазуға болады:

$$\varepsilon(t) = 399{,}797\cos(100\pi t) - 133{,}266\cos(300\pi t).$$

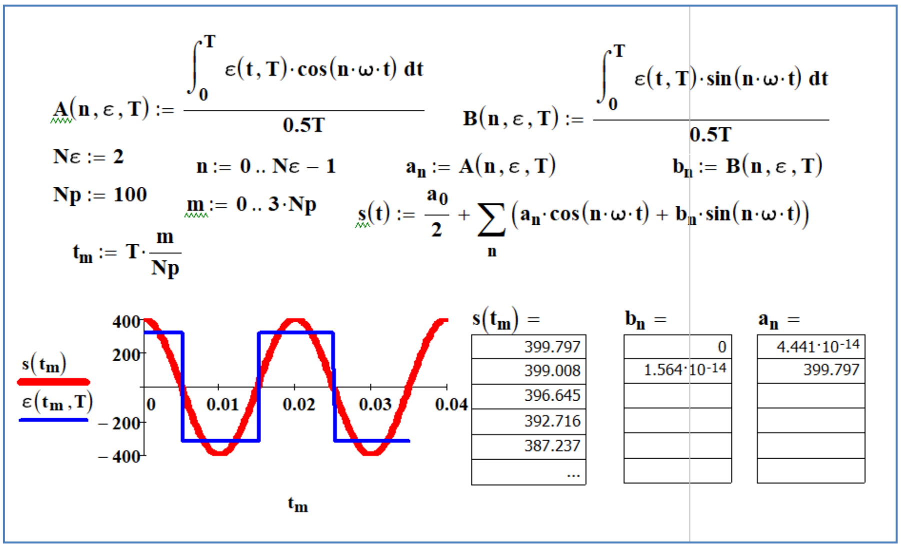
13-суретте график түрінде алғашқы екі мүшенің қосындысының графикалық жуықтауы көрсетілген (қызыл сызық). $s(t_m)=$ өрнегінен кейінгі кестеде теңдеудің барлық бастапқы 100 нүктесінің (Np:= 100) сандық мәндері берілген

$$\varepsilon(t) = f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)).$$

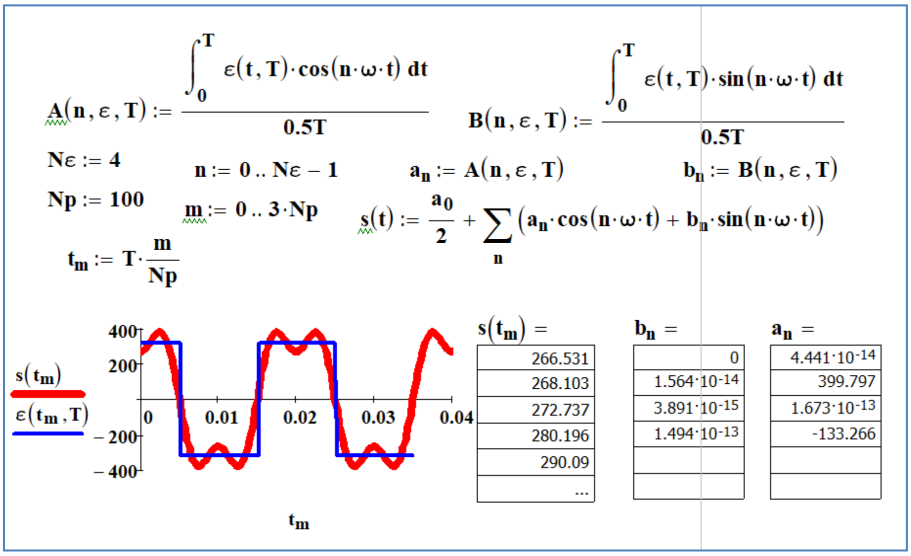
Кестелік мәндер Фурье қатарының алғашқы екі мүшесінің қосындысын жуықтаудың сандық шешімі болады.

14-суретте көрсетілген периодтық кернеу үшін Фурье қатарының мүшелерінің қосындысын есептеу әдісін қолдана отырып, Nε = 8 шарты орындалған жағдай үшін қатардың алғашқы төрт мүшесінің қосындысын табамыз:

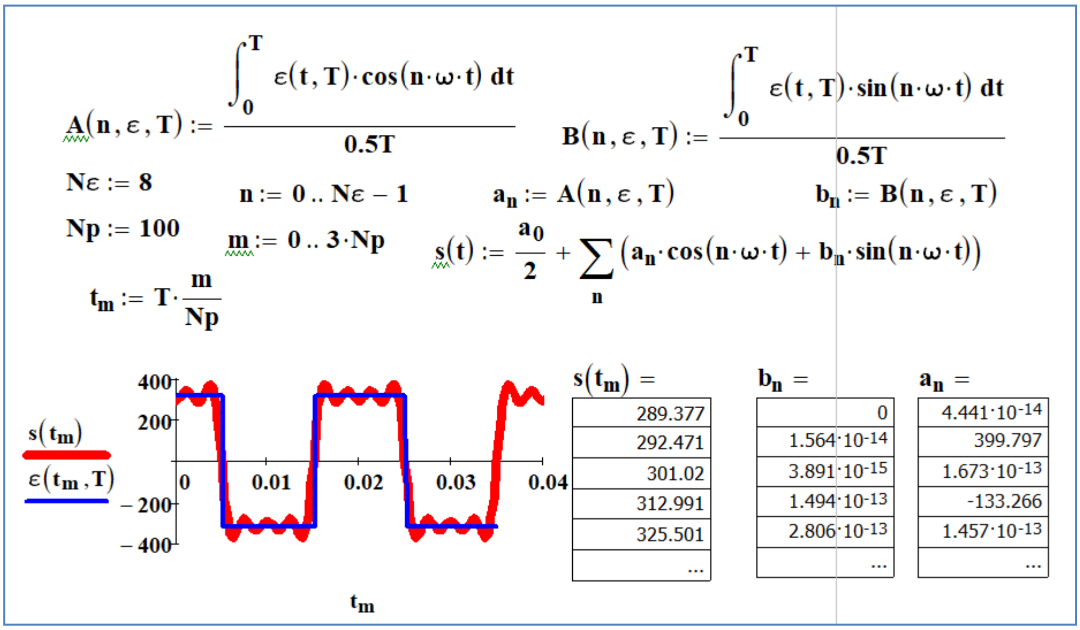
$$\varepsilon(t) = \frac{4\varepsilon_0}{\pi}\left(\cos(\omega t) - \frac{\cos(3\omega t)}{3} + \frac{\cos(5\omega t)}{5} - \frac{\cos(7\omega t)}{7}\right).$$



12-сурет. Фурье қатарының бірінші мүшесінің графикалық және сандық жуықтаулары.



13-сурет. Фурье қатарының алғашқы екі мүшесінің қосындысының графикалық және сандық жуықтаулары.



14-сурет. Фурье қатарының алғашқы төрт мүшесінің қосындысының графикалық және сандық жуықтаулары.

Қорытынды

Біз Mathcad қолданбалы бағдарламалар пакеті көмегімен Фурье қатарына жіктеу арқылы периодты гармониялық емес электр тогын немесе сигналдарды гармоникалық талдаудың кейбір мәселелерін зерттедік. Функцияның тақ және жұп түрлерімен сипатталатын синусоидалы (немесе косинусоидалы) емес периодты токтар қарастырылды. Периодты гармониялық емес сигналдарды талдау үшін есептеу эксперименттерін жүргізу кезінде компьютер экранында осы сигналдардың әртүрлі гармоникасы графиктер мен сандық мәндер түрінде көрініс тапты. Mathcad ортасында құрастырылған компьютерлік бағдарламалар қарапайым және тригонометриялық теңдеулердің жазбаларынан ерекшеленбейді. Бұл оларды периодты гармониялық емес токтар мен кернеулерді зерттеу үшін пайдаланудың ыңғайлылығын қамтамасыз етеді. Периодты электрлік сигналдарды зерттеудің компьютерлік әдісінің пайдалылығы мынада: осы сигналдардың Фурье қатарына жіктеудің компьютерлік шешімі (графикалық және сандық жуықтау) оларды аналитикалық шешу процедурасымен салыстырғанда тез жүзеге асырылады. Гармониялық емес периодты тербелістерді сипаттайтын параметрлерді есептеу эксперименттері көмегімен зерттеудің практикалық маңызы да зор болады.

Авторлардың үлесі

Б.С. Желдыбаева: тұжырымдама жасау, әдістеме әзірлеу, зерттеу жүргізу, қолжазбаның бастапқы нұсқасын дайындау және жазу; **Г.Р. Кощанова**: деректерді өңдеу және басқару, формалды талдау, әдістемені әзірлеу. жобалау; модельдер жасау; **А.Г. Амангосова**: мәтінді редакциялау және толықтыру, мақаланың бастапқы нұсқасын жазу; **Б.А. Джугембаева:** көрнекі материалдар дайындау, мәтінді редакциялау және толықтыру; **Б. Туребаева:** бағдарламалау, бағдарламалық қамтамасыз ету әзірлеу, компьютерлік бағдарламаларды жобалау, бағдарламалық код пен қолдаушы алгоритмдерді іске асыру; **А.Қ. Қасымханова:** бағдарламалау, бағдарламалық қамтамасыз ету әзірлеу, компьютерлік бағдарламаларды жобалау, бағдарламалық код пен қолдаушы алгоритмдерді іске асыру; **Ш.Ж. Сырбаева:** пікір білдіру және түзету, жобалау; модельдер жасау. **Л.С. Каинбаева:** жарияланған жұмысты дайындау, **Б.А. Мұқұшев:** ғылыми жетекшілік, жобаны басқару.

Әдебиеттер
References

1 N. Roberts, N. Phillips, R. Weerasekera, A. Adamatzky, Propagation of electrical signals by fungi, *Biosystems* **229,** 104933 (2023). https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2023.104933

2 U. Leith, Modeling a Periodic Signal Using Fourier Series, *Journal of Applied Mathematics and Physics* **12** (3), 841-860 (2024). https://doi.org/10.4238/jamp.2024.123052

3 S. Madgula**,** V. Veeramsetty**,** R. Durgam,**.** Signal processing approaches for power quality disturbance classification: A comprehensive review, Results in Engineering 25, , 104569 (2025). https://doi.org/10.1016/j.rineng.2025.104569

4 Н.Н. Воробьев, Теория рядов. 4 издание, перераб. и доп., (Москва, Наука, 1979), 408 с. [*N.N. Vorobyov, Theory of series. 4th edition, revised. and add., (Moscow, Nauka, 1979), 408 p.* (*in Russ)*].

5 В.В. Жук, Г.И. Натансон, Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации, (Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та, 1983), 188 с. [*V.V. Zhuk, G.I. Natanson, Trigonometric Fourier series and elements of approximation theory, (Leningrad, Publishing House of the Leningrad University, 1983), 188 p. (in Russ)*].

6 М.Т.Иванов, А.Б.Сергиенко, В Н. Ушаков, Теоретические основы радиотехники: Учеб. Пособие, (Москва, Высш. шк., 2002), 306 с. [*M.T. Ivanov, A.B. Sergienko, V.N. Ushakov, Theoretical foundations of radio engineering: Textbook, (Moscow, Higher School, 2002). 306 p. (in Russ)*].

7 С.И. Баскаков, Радиотехнические цепи и сигналы, (Москва, Высшая школа, 1998), 463 с. [*S.I. Baskakov, Radio engineering circuits and signals, (Moscow, Higher School, 1998), 463 p. (in Russ)*].

8 В. Очков, MathCAD 14 для студентов, инженеров и конструкторов, (Санкт-Петербург, 2007), 370 с. [*V. Ochkov, Points in MathCAD 14 for students, engineers and designers, (Saint Petersburg, 2007), 370 p. (in Russ)*].

9 Д. Кирьянов, Mathcad 14 в подлинке, (Санкт-Петербург, 2007), 682 с. [*D. Kiryanov, Mathcad 14 in the original, (Saint Petersburg, 2007), 682 p. (in Russ)*].

10 Б.А. Мукушев, Изучение физических процессов посредством пакета MathCAD, *Учебная физика* **2**, 45-50 (2022). [*B.A. Mukushev, Studying physical processes using the MathCAD package, Educational Physics* ***2****, 45-50 (2022) (in Russ)*].

11 Б.А. Мукушев, Пакет прикладных программ Mathcad, *Вестник КазАТУ* **2**(113), 197-202 (2022). [B.A. Mukushev, Mathcad application software package, *Bulletin of KazATU* **2**(113), 197-202 (2022) *(in Russ)*].

12 F. Nelson, Using mathcad to simplify uncertainty computations in a laboratory course, *Computer Applications in Engineering Education* **23**(2), P. 250-257 (2014). https://doi.org/10.1002/cae.21593

Авторлар туралы ақапарат:

Балғын Желдыбаева – педагогика ғылымдарының кандидаты, Шәкәрім атындағы Семей университеті (Семей, Қазақстан, e-mail: balgun@mail.ru).

Гүлаш Кощанова – педагогика ғылымдарының кандидаты, профессор, Ш.Есенов атындағы Каспий технология және инженерия университеті (Ақтау, Қазақстан, e-mail: koshanova.k@mail.ru).

Ардақ Амангосова – химия ғылымдарының кандидаты, физика және техникалық пәндер кафедрасының доценті, Х. Досмұхамедов ат. Атырау университеті (Атырау, Қазақстан, e-mail: amangosova1961@mail.ru).

Бақытгүл Джугембаева – физика магистрі, физика және техникалық пәндер кафедрасының аға оқытушысы, Х. Досмұхамедов ат. Атырау университеті (Атырау, Қазақстан, e-mail: asbaku@mail.ru).

Гүлнар Туребаева – физика магистрі, физика кафедрасының аға оқытушысы, Әбілқас Сағынов атындағы ҚарТУ (Қарағанды, Қазақстан, e-mail: gulnara83.12.06@mail.ru).

Ақнұр Касымханова – физика ғылымдарының магистрі, физика кафедрасының ассистенті, Әбілқас Сағынов атындағы Қарағанды техникалық университеті (Қарағанды, e-mail: aknur_kassymkhanova@mail.ru).

Шара Сырбаева – педагогика ғылымдарының кандидаты, асс. профессор, Х. Досмұхамедов ат. Атырау университеті (Атырау, Қазақстан, e-mail: Syrbaeva@bk.ru).

Лариса Қаинбаева – педагогика ғылымдарының кандидаты Қорқыт Ата ат. Қызылорда университеті (Қызылорда, Қазақстан, e-mail: larissa_kain@mail.ru).

Базарбек Мұқұшев – профессор, педагогика ғылымдарының докторы, Сейфуллин ат. ҚазАТУ (Астана, Қазақстан, e-mail: mba-55@mail.ru).

Information about authors:

Balgyn Zheldybayeva – candidate of pedagogical sciences, Shakarim State University (Semey, Kazakhstan, e-mail: balgun@mail.ru).

Gulash Koshchanova – candidate of pedagogical sciences, professor, Sh. Yesenov Caspian university of technology and engineering (Aktau, Kazakhstan, e-mail: koshanova.k@mail.ru).

Ardak Amangosova – candidate of chemical sciences, assistant professor of the department of physical and technical disciplines, Kh. Dosmukhamedov Atyrau university (Atyrau, Kazakhstan, e-mail: amangosova1961@mail.ru).

Bakytgul Dzhugembayeva – master physicist, senior lecturer of the department of physical and technical disciplines, Kh. Dosmukhamedov Atyrau university (Atyrau, Kazakhstan, e-mail: amangosova1961@mail.ru).

Gulnar Turebayeva – master physicist, senior teacher of the physics department, A.Saginov Karaganda technical university (Karaganda, Kazakhstan, e-mail: gulnara83.12.06@mail.ru).

Aknur Kasymkhanova – master of physics, assistant professor of the department of physics, A.Saginov Karaganda technical university (Karaganda, e-mail: aknur_kassymkhanova@mail.ru).

Shara Syrbaeva – candidate of pedagogical sciences, assistant professor, Kh. Dosmukhamedov Atyrau university (Atyrau, Kazakhstan, e-mail: syrbaeva@bk.ru).

Larisa Kainbayeva – candidate of pedagogical sciences, A.Saginov Karaganda technical university (Kyzyl-Orda, Kazakhstan, e-mail: larissa_kain@mail.ru).

Bazarbek Mukushev – professor, doctor of pedagogical sciences, S. Seifullin Kazakh agrotechnical research university (Astana, Kazakhstan, e-mail: mba-55@mail.ru).

Информация об авторах:

Желдыбаева Балгын Сембаевна – кандидат педагогических наук, Университет имени Шакарима г.Семей (Семей, Казахстан, e-mail: balgun@mail.ru).

Кощанова Гулаш Рахметовна – кандидат педагогических наук, профессор, Каспийский технологический и инженерный университет им. Ш. Есенова (Актау, Казахстан, e-mail: koshanova.k@mail.ru).

Амангосова Ардак Ганибаевна – кандидат химических наук, асс.профессор кафедры физико-технических дисциплин, Атырауский университет Х. Досмухамедова (Атырау, Казахстан, e-mail: amangosova1961@mail.ru).

Джугембаева Бакытгуль Аскаровна – магистр физики, старший преподаватель кафедры физико-технических дисциплин, Атырауский университет Х. Досмухамедова (Атырау, Казахстан, e-mail: amangosova1961@mail.ru).

Туребаева Гульнар Бейсенгазиевна – магистр физики, старший преподаватель кафедры физики КарТУ имени Абилкаса Сагинова (Караганда, Казахстан, e-mail: gulnara83.12.06@mail.ru).

Касымханова Акнур Касымхановна – магистр физики, ассистент кафедры физики Карагандинского технического университета имени А. Сагинова (Караганда, Казахстан, e-mail: aknur_kassymkhanova@mail.ru).

Сырбаева Шара Жеткербаевна – кандидат педагогических наук, асс.профессор, Атырауский университет Х. Досмухамедова (Атырау, Казахстан, e-mail: syrbaeva@bk.ru).

Каинбаева Лариса Сагижановна – кандидат педагогических наук, Кзыл-ординский университет имени Қоркыт Ата (Кзыл-орда, Казахстан, e-mail: larissa_kain@mail.ru).

Мукушев Базарбек Агзашевич – профессор, доктор педагогических наук, КазАТУ им. Сейфуллина (Астана, Казахстан, e-mail: mba-55@mail.ru).

***Мақала тарихы**: түсті: 16 қараша 2025; қабылданды: 12 қаңтар 2026.*
***Article history:** received: 16 November 2025; accepted: 12 January 2026.*
***История статьи:** поступила: 16 ноября 2025; принята: 12 января 2026.*