

Джунушалиев В.Д.,  
Проценко Н.А.

**Движение цветных  
заряженных частиц в SU(3)  
неабелевой модели темной  
материи**

В статье предлагается метод экспериментальной проверки одной из моделей темной материи, в которой темной материей является классическое неабелево SU(3) калибровочное поле Янга – Миллса. Предлагаемый метод основан на анализе движения цветных заряженных частиц в неабелевом калибровочном поле. Для анализа такого движения используются уравнения Вонга, которые являются обобщением 2 – ого закона Ньютона для частиц, имеющих цветной заряд. Для численного исследования уравнения Вонга записаны в безразмерном виде. Используя анзац для монополя в SU(3) калибровочной теории Янга – Миллса, получены выражения для соответствующих потенциалов и напряженностей полей. Используя уравнения Янга – Миллса, получены асимптотические значения этих полей. С помощью этих выражений численно получены решения уравнений Вонга. Результаты вычислений представлены в виде траекторий движения цветных заряженных частиц.

**Ключевые слова:** уравнения Вонга, уравнения Янга – Миллса, цветные частицы, неабелево калибровочное поле.

Dzhunushaliev V.D.,  
Procenko N.A.

**The motion of colored charged  
particles in the SU (3) non-  
Abelian model of dark matter**

A method of experimental verification of non – Abelian dark matter model where the dark matter is a classic non-Abelian SU (3) gauge field Yang – Mills is proposed. The method is based on the analysis of motion of charged particles in the color non – Abelian gauge field. For the analysis of the motion we use Wong equations that are the generalization of the second Newton law for particles with a color charge. In order to find numerical solution of Wong equations we write them in dimensionless form. Using monopole ansatz of SU(3) Yang – Mills gauge theory we obtain the expressions for gauge potentials and field strengths. Using Yang – Mills equations we obtain asymptotic expressions of these fields. Wong equations are numerically solved with the help of these expressions. The result of calculations is presented as the mechanical trajectories of color charged particles.

**Key words:** Wong equations, Yang – Mills equations, colored particles, non – Abelian gauge field.

Джунушалиев В.Д.,  
Проценко Н.А.

**Қара материяның SU(3)  
неабельдік моделіндегі  
түсті зарядты бөлшектердің  
қозғалысы**

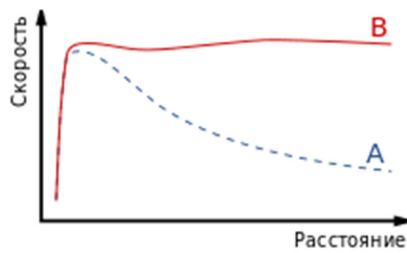
Мақалада қара материя ретінде Янг-Миллстің классикалық неабельдік SU(3) калибрлік өрісі боп табылатын қара материя модельдерінің біреуін эксперименттік тексерісінің әдісі ұсынылады. Ұсынылатын әдіс түсті зарядты бөлшектердің неабельдік калибрлік өрісіндегі қозғалысының талдауында негізделген. Мұндай қозғалысты талдау үшін түсті заряды бар бөлшектері үшін Ньютонның 2-ші заңының жалпылауы болып табылатын Вонг теңдеулері қолданылады. Сандық зерттеу үшін Вонг теңдеулері мөлшерсіз түрде жазылған. Янг – Миллстің SU(3) калибрлік теориясының моноөрісі үшін анзацын пайданана отыра, өрістердің сәйкес потенциалдары мен кернеуліктері үшін өрнектер алынды. Янг – Миллстің теңдеулері пайдалана отыра, бұл өрістердің асимптотикалық мәндері алынған. Осы өрнектер көмегімен Вонг теңдеулерінің шешімдері сандық түрде алынған. Есептеулердің нәтижелері түсті зарядты бөлшектердің қозғалысы траекториялары түрінде көрсетілген.

**Түйін сөздер:** Вонг теңдеулері, Янг – Миллс теңдеулері, неабельдік өріс, түсті бөлшек.

## ДВИЖЕНИЕ ЦВЕТНЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В SU(3) НЕАБЕЛЕВОЙ МОДЕЛИ ТЕМНОЙ МАТЕРИИ

### Введение

Тёмная материя – гипотетическая форма материи, которая не испускает электромагнитного излучения и напрямую не взаимодействует с ним. В 1922 году астрономы Джеймс Джинс и Якобус Каптейн исследовали движение звёзд в нашей Галактике и пришли к выводу, что большая часть вещества в галактике невидима; в этих работах, вероятно, впервые появился термин «тёмная материя» [1]. Астроном Фриц Цвикки, в 30-х годах изучая скопления галактик, обнаружил нечто странное [2]. По отдельности галактики не представляли ничего необычного, но исходя из расчетов было видно, что они не могут находиться вместе, а просто должны были разлететься в разные стороны друг от друга. Он заметил, что в скоплениях галактик светящего вещества намного меньше, чем должно быть, чтобы сила тяготения удерживала галактики вместе. Чтобы объяснить это явление он предположил, что существует некое неизвестное вещество, обладающее огромной гравитирующей силой, которое удерживает галактики вместе. Это вещество теперь именуется «темной материей». Это свойство данной формы вещества делает невозможным её прямое наблюдение. Другим наблюдательным данным, иллюстрирующим существование темной материи является измерение скорости вращения периферийных звёзд вокруг центра туманности Андромеды: эти скорости не уменьшались, как предсказывает небесная механика: обратно пропорционально  $\sqrt{R}$  (где  $R$  – расстояние до центра), а оставались почти постоянными, см. Рис 1. Это могло означать, что галактика содержит значительную массу невидимого вещества [3].



**Рисунок 1** – Кривая вращения периферийных звезд в галактике: (A) ожидаемая; (B) реальная

Согласно последним наблюдениям [4], около 69% материи Вселенной состоит из темной энергии, и почти 26% из темной материи. Эти расчеты подтверждаются большим числом независимых наблюдений [5].

Кандидаты на роль темной материи:

1. Барийонная темная материя. Предполагается, что темная материя состоит из барионного вещества, которое слабо взаимодействует с электромагнитным излучением, что делает невозможным его прямое наблюдение.

2. Небарийонная темная материя. Теоретические модели предоставляют большой выбор возможных кандидатов на роль небарионной невидимой материи. Перечислим некоторые из них.

1.1. Нейтрино стандартной модели. После экспериментов по осцилляции ускорительных [6], атмосферных [7] и солнечных [8] нейтрино было полностью доказано что у этих частиц ненулевая масса, следовательно, они должны вносить вклад в скрытую массу. На нынешней момент, нейтрино – единственная частица в кандидаты на ТМ, которую можно зарегистрировать в эксперименте.

1.2. Сверхмассивные нейтрино. Массивные нейтрино уже не являются частицами Стандартной модели. Согласно данным LEP [9], по измерению ширины распада  $Z \rightarrow \nu\bar{\nu}$  – бозона, существует только три типа легких нейтрино ( $\tau$ ,  $\mu$ ,  $e$ ), которые были рассмотрены нами выше и исключается существование тяжелых нейтрино вплоть до 45 ГэВ.

1.3. Стерильное нейтрино. Стерильные нейтрино впервые были упомянуты более 20 лет назад в работе [10]. Модели с данными частицами активно развиваются и классифицируются как расширения Стандартной модели физики элементарных частиц.

1.4. Еще один кандидат на роль скрытой массы – аксионы. Это псевдоскалярная гипотети-

ческая частица, постулированная в 1977 г. в связи с нарушением CP-инвариантности в КХД (квантовая хромодинамика) [11].

1.5. Суперсимметричные частицы. Рассматривая суперсимметричные теории (SUSY), можно предположить, что существует как минимум одна частица, которая подходит на роль темной материи. Существуют теоретические предсказания массы и реликтовой плотности нейтралино. Кроме нейтралино другими возможными кандидатами на роль частиц темной материи являются снейтрино и гравитино. Однако, экспериментальные данные полученные в [12] исключают снейтрино из кандидатов в ТМ.

### Неабелева модель темной материи

В данной работе мы рассматриваем модель темной материи [13] – [15], которая представляет собой классическое неабелево поле. Чтобы экспериментально протестировать эту модель, необходимо рассмотреть движение цветных заряженных частиц в этом поле. В нашей модели роль поля играет классическое неабелево SU(3) калибровочное поле, а в роли частиц выступают цветные заряженные частицы (монополи или уединенные кварки). Цветные заряженные частицы – это неабелево обобщение классического заряда в неабелевых полях. Они характеризуются цветным индексом, который пробегает значение от 1 до 8. Данное SU(3) калибровочное поле является моделью темной материи при описании вращения периферийных звезд в галактике.

Уравнениями, описывающие это калибровочное поле, являются уравнения Янга-Миллса

$$\partial_\nu F^{a\mu\nu} = 0 \quad (1)$$

где  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$  – тензор напряженности поля,  $A_\nu^a$  – SU(3) калибровочный потенциал,  $\mu = 0,1,2,3$  – пространственно – временной индекс,  $a=0,1,2,\dots,8$  – цветной индекс,  $g$  – константа связи,  $f^{abc}$  – структурные константы SU(3) калибровочной группы. Уравнения (1) являются нелинейными обобщениями уравнений Максвелла.

Для описания цветных заряженных частиц мы используем систему уравнений Вонга:

$$m \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = -g F_a^{\mu\nu} T^a \frac{dx_\nu}{ds}, \quad (2)$$

$$\frac{dT_a}{ds} = -gf_{abc} \left( A_b^\mu \frac{dx_\mu}{ds} \right) T_c \quad (3)$$

где  $T_a$  – вектор цвета,  $f_{abc}$  – структурные константы  $SU(3)$  калибровочной группы,  $\frac{dx_\mu}{ds} = 4 - x$  скорости частицы. Для простоты мы рассмотрим нерелятивистский случай, когда  $ds \approx cdt$ . К сожалению, невозможно получить аналитическое решение уравнений (2) – (3), поэтому мы будем искать численное решение этих уравнений. Для численных расчетов мы используем систему символьных вычислений Wolfram Mathematica 10.

Для классического  $SU(3)$  калибровочного поля Янга – Миллса калибровочный потенциал  $A_\mu^a$  был выбран анзац в форме [16]:

$$A_0^2 = -2 \frac{z}{gr^2} \chi(r), \quad (4)$$

$$A_0^5 = -2 \frac{y}{gr^2} \chi(r), \quad (5)$$

$$A_0^7 = -2 \frac{x}{gr^2} \chi(r), \quad (6)$$

$$A_i^2 = 2 \frac{\varepsilon_{3ij} x^j}{gr^2} [h(r) + 1], \quad (7)$$

$$A_i^5 = -2 \frac{\varepsilon_{2ij} x^j}{gr^2} [h(r) + 1], \quad (8)$$

$$A_i^7 = 2 \frac{\varepsilon_{1ij} x^j}{gr^2} [h(r) + 1], \quad (9)$$

$$A_i^a = \lambda_{ajk} (\varepsilon_{ilk} x^j + \varepsilon_{ilk} x^k) \frac{x^l}{gr^3} v(r), \quad (10)$$

$$A_1^a = \frac{1}{2} (\lambda_{aij} + \lambda_{aji}) x^i x^j \frac{w(r)}{gr^2} \quad (11)$$

здесь  $A_\mu^{2,5,7} \in SU(2)$  принадлежит подгруппе  $SU(2) \subset SU(3)$ ;  $i, j, k = 1, 2, 3$  являются пространственными индексами. Исходя из этого были рассчитаны напряженности этих полей  $F_a^{\mu\nu}$  и подставлены в уравнения Янга – Миллса (1). Соответствующие уравнения Янга – Миллса (1) с потенциалом (4) – (11) ( $\chi(r) = h(r) = 0$ ) выглядят следующим образом

$$x^2 w'' = 6wv^2, \quad (12)$$

$$x^2 v'' = v^3 - v - vw^2 \quad (13)$$

здесь вводится безразмерный радиус  $x = r/r_0$ ,  $r_0$  произвольная константа. Асимптотическое поведение функций  $v(x)$ ,  $w(x)$  при  $x \gg 1$  [14] следующее:

$$v(x) \approx A \sin(x^\alpha + \phi_0), \quad (14)$$

$$w(x) \approx \pm \left[ \alpha x^\alpha + \frac{\alpha-1}{4} \frac{\cos(2x^\alpha + 2\phi_0)}{x^\alpha} \right], \quad (15)$$

$$3A^2 = \alpha(\alpha - 1) \quad (16)$$

где  $\alpha > 1$ .

Запишем уравнения Вонга в сферической системе координат:

$$m\ddot{r} = -gT^a (F_0^{a1} u^0 + F_1^{a1} u^1 + F_2^{a1} u^2 + F_3^{a1} u^3), \quad (17)$$

$$2mr\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} =$$

$$= -gT^a (F_0^{a2} u^0 + F_1^{a2} u^1 + F_2^{a2} u^2 + F_3^{a2} u^3), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} 2rr\dot{\phi}\sin^2\theta + \theta\dot{\phi}r^2\sin 2\theta + \dot{\phi}r^2\sin^2\theta \\ = -gT^a (F_0^{a3} u^0 + \\ + F_1^{a3} u^1 + F_2^{a3} u^2 + F_3^{a3} u^3). \end{aligned} \quad (19)$$

В правой части уравнений (17) – (19) подставляем асимптотические значения потенциалов (14) (15) и соответствующие значения тензора поля  $F_a^{\mu\nu}$ . В ходе вычислений, для упрощения задачи мы пренебрегли некоторыми слагаемыми, такими как  $\frac{1}{4}x^{-\alpha}$  и т.д.

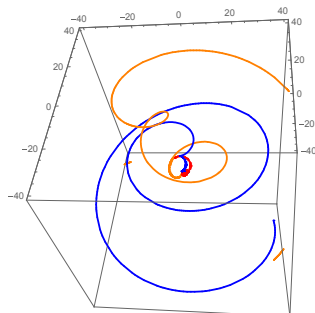
Численные расчеты были проведены для безразмерной системы уравнений Вонга:

$$\frac{d\tilde{x}^i}{d\tilde{t}^2} = -\tilde{F}_{\mu\nu}^a \tilde{T}_a \frac{d\tilde{x}^\nu}{d\tilde{t}}, \quad (20)$$

$$\frac{d\tilde{T}_a}{d\tilde{t}} = -f_{abc} \left( \tilde{A}_\mu^b * \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tilde{t}} \right) \tilde{T}_c \quad (21)$$

где  $\tilde{x}^i = \frac{x^i}{R}$  – безразмерная координата частицы,  $\tilde{F}_{\mu\nu}^a = gR^2 \tilde{F}_{\mu\nu}^a$  – безразмерная напряженность поля,  $\tilde{T}_a = \frac{T_a}{R}$  – безразмерный вектор цвета,  $\tilde{A}_\mu^b = gR \tilde{A}_\mu^b$  – безразмерный  $SU(3)$  калибровочный потенциал,  $f^{abc}$  – структурные константы  $SU(3)$  калибровочной группы,  $R$  – некий характерный

размер,  $t_0 = \frac{R}{c}$ ,  $\tilde{t} = \frac{t}{t_0}$ ,  $c$  – скорость света в вакууме.



**Рисунок 2** – Траектории движения цветных заряженных частиц с различными начальными скоростями.

В результате численных вычислений мы получили различные зависимости координат движущихся частиц  $r(t), \theta(t), \varphi(t)$  в поле неабелевого калибровочного потенциала в трехмерном пространстве при различных начальных скоростях, см. рис 2.

### Заключение

Таким образом, мы видим, что в этой модели темная материя может быть экспериментально обнаружена путем наблюдения за траекториями движения цветных заряженных частиц (моно-полей или уединенных кварков).

### Литература

- 1 Решетников В. Почему небо тёмное. Как устроена Вселенная. – М:Фрязино: Век 2, 2012. – 192 с.
- 2 Zwicky F. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln // *Helvetica Physica Acta*.-1933.-Vol.6. – P.110-127
- 3 Gustavo Y., Stefan G., Hoffman Y. Dark Matter in the Local Universe // *New Astronomy Reviews*.- 2014. – Vol.1.- P.13.
- 4 Planck Collaboration: Ade P. et. al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters// *Phys. Rev.* – 2015. – Vol.2. – P.15
- 5 Rafael C. Nunes, Supriya Pan, Emmanuel N. Saridakis. New constraints on interacting dark energy from cosmic chronometers // *Phys. Rev.* – 2016. – Vol. 1. – P.12-17.
- 6 Michael D. G. et al. Observation of muon neutrino disappearance with the minos detectors and the NuMI neutrino beam// *Phys. Rev. Lett.* – 2006. – Vol. 97. – P. 6.
- 7 Adamson P. et. al. First Observations of Separated Atmospheric Muon Neutrino and Muon Anti – Neutrino Events in the MINOS Detector // *Phys. Rev. Lett.* – 2006.- Vol. 79. – P. 17.
- 8 Aharmim B. et al. Electron Energy Spectra, Fluxes, and Day-Night Asymmetries of 8B Solar Neutrinos from the 391-Day Salt Phase SNO Data Set// *Phys. Rev.*-2005.- Vol.1.- P.45.
- 9 Bjorken J. D., Llewellyn Smith C.H. Spontaneously Broken Gauge Theories of Weak Interactions and Heavy Leptons// *Phys. Rev.D* – 1973. – Vol. 7. – P. 887.
- 10 Dodelson S., Widrow L. Sterile Neutrinos as Dark Matter // *Phys. Rev. Lett.* – 1994. –Vol. 72. – P.17.
- 11 Кладдор – Клайнгротхаус Г.В., Цюбер К. *Астрофизика элементарных частиц*.- М.: УФН. – 2000. – 496 с.
- 12 Falk T., Olive K., Srednicki M. Heavy Sneutrinos as Dark Matter // *Phys. Lett. B.* – 1994. –Vol.339. – P. 248-251.
- 13 Dzhunushaliev V. Classical SU(3) Gauge Field as a Dark Matter // *Journal of Modern Physics.* – 2013.- Vol. 4. – P.111-120.
- 14 Dzhunushaliev V. Colored dark matter // *Science Echoes*.- 2008. – Vol.4. No.1. – P.47-69.
- 15 Dzhunushaliev V. Classical color fields as a dark matter candidate // *Central Eur. J. Phys.*.-2007. – Vol. 5. – P. 342.
- 16 Dzhunushaliev V. D., Singleton D. *Confining Solutions of SU(3) Yang-Mills Theory* // Nova Science Publishers, Hauppauge. -1999. – P.336 – 346.

### References

- 1 V. Reshetnikov, *Pochemu nebo tomnoye. Kak ustroyena Vselennaya.* – M:Fryazino: Vek 2, 2012, 192 s. (in russ).
- 2 F. Zwicky, *Helvetica Physica Acta*, 6, 110-127, (1933).
- 3 Y. Gustavo, G. Stefan, Y. Hoffman, *New Astronomy Reviews*, 1, 13, (2014).
- 4 Planck Collaboration: Ade P. et. al., *Phys. Rev.*, 2, 15, (2015).
- 5 Rafael C. Nunes, Supriya Pan, Emmanuel N. Saridakis, *Phys. Rev.* 1, 12-17, (2016).
- 6 Michael D. G. et al., *Phys. Rev. Lett.*, 97, 6, (2006).
- 7 P. Adamson et. al., *Phys. Rev. Lett.*, 79, 17, (2006).
- 8 B. Aharmim et al., *Phys. Rev.*, 1, 45, (2005).
- 9 J.D. Bjorken, Llewellyn Smith C.H., *Phys. Rev. D*, 7, 887, (1973).
- 10 S. Dodelson, L. Widrow, *Phys. Rev. Lett.*, 72, 17, (1994).
- 11 Klapdor – Klayngrotkhaus G.V., Tsyuber K. *Astrofizika elementarnykh chastits*.- M.: UFN, 2000. – 496 s. (in russ).
- 12 T. Falk, K. Olive, M. Srednicki, *Phys. Lett. B*, 339, 248-251, (1994).
- 13 V. Dzhunushaliev, *Journal of Modern Physics*, 4, 111-120, (2003).
- 14 V. Dzhunushaliev, *Science Echoes*, 4(1), 47-69, (2008).
- 15 V. Dzhunushaliev, *Central Eur. J. Phys.*, 5, 342, (2007).
- 16 V.D. Dzhunushaliev, D. Singleton, Nova Science Publishers, Hauppauge, 336-346, (2009).