Имамбеков О., Токсаба Ж.

Расчет матричных элементов рассеяния $\pi^{\pm}$-мезонов на изотопах Не в теории Глаубера

В рамках дифракционной теории Глаубера рассчитаны матричные элементы рассеяния π-мезонов изотопами ядра гелия: ^{6}He и ^{8}He. При этом взаимодействие π-мезонов с ядрами представлены в виде ряда многократного рассеяния. Этот подход позволяет в таких процессах явно учесть разные кратности соударений и их вклад в суммарное дифференциальное сечение реакции. Для описания внутреннего состояния ядра ^{6}He используется хорошо апробированные реалистические волновые функции в трехчастичной αnn-модели, а для ядра ^{8}He – оболочечные функции с большим базисом. Важно отметить, что при таком подходе удается рассчитать все матричные элементы аналитически без каких либо упрощений, а значить и без потери точности, неизбежном при численном интегрировании.

Ключевые слова: теория Глаубера, многократное столкновение, матричные элементы, π-мезон, трехчастичные волновые функций, оболочечные волновые функции, дифференциальное сечение рассеяния.

Imambekov O., Toksaba Zh.

Calculation of matrix elements of $\pi^{\pm}$ -meson scattering by Heisotopesin the Glauber theory

Within the framework of the Glauber diffraction theory calculated scattering matrix elements of π-mesons isotopes helium nucleus: ^{6}He and ^{8}He. The interaction π-mesons with nuclei are presented as a series of multiple scattering. This approach allows for such processes explicitly take into account the multiplicity of different collisions and their contribution to the total differential cross section for the reaction. For a description of the internal state of the ^{6}He nucleus using well proven realistic three-particle wave function in αnn-model, and for the ^{8}He nucleus - shell function with a large basis. It is important to note that with this approach it is possible to calculate all matrix elements analytically without any simplifications, and thus without loss of accuracy inevitable for numerical integration.

Key words: the Glauber theory, multiple collision, matrix elements, π-meson, three-particle wave function, shell wave function, differential scattering cross section.

Имамбеков О., Тоқсаба Ж.

Не изотоптарына Глаубер теориясын қолданып, $\pi^{\pm}$-мезондық ыдырауның матрицалық элементтерін қорытып алу

Глаубер теориясының ауқымында π-мезонның гелий ядросының ^{6}He және ^{8}He-ядроларынан шашырауының матрицалық элементтері есептелген. Мұндағы π-мезондардың ядролармен әсерлесуі көпеселі шашырау қатары түрінде анықталған. Мұндай үрдістерді осылай қарастыру ал бұл соқтығысудың әртүрлі еселіктерін және олардың қосынды дифференциальдық қимаға үлесін ескеруге мүмкіндік береді. Берілген ^{6}He ядросының ішкі күйін ескеру үшін жақсы сыналған нақтылы үшбөлшекті αnn-толқындық функциясы, ал ^{8}He үшін үлкен базисті қабыршықты функция пайдаланылған. Осылай жасағанда барлық матрицалық элементтерді ешқандай оңайлатусыз, сандық есептеулерде болмай қоймайтындәлдікті жоғалтудан ада аналитикалық жолмен есептеуге болады.

Түйін сөздер: Глаубер теориясы, көпретті соқтығысу, матрицалық элементтер, π-мезон, үшбөлшекті толқындық функция, қабыршықты толқындық фукция, шашыраудың дифференциальдық қимасы.

УДК 539.17

Имамбеков О., *Токсаба Ж.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
Республика Казахстан, г. Алматы
*E-mail: toksaba.zhanaidar@mail.ru

РАСЧЕТ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РАССЕЯНИЯ π±-МЕЗОНОВ НА ИЗОТОПАХ НЕ В ТЕОРИИ ГЛАУБЕРА

Введение

Двойственность пионного взаимодействия в ядре состоит в том, что с одной стороны пионы являются переносчиками ядерных сил, с другой – зондом, позволяющим изучать природу этих же сил. В ядерной физике пион является легчайшим из виртуальных квантов поля с ненулевой массой во взаимодействии между двумя нуклонами. Он играет особую роль: на больших расстояниях (r > 2 фм) посредством однопионного обменаобуславливая дальнодействующую часть силы, на средних (2 фм > r > 0,8 фм) осуществляя, в основном, двухпионное поглощение, и на малых расстояниях (r < 0,8 фм) проявляя свои кварковые степени свободы.

Процессы взаимодействия пионов с ядрами при промежуточных энергиях изучаются в рамках различных моделей: оптической, каскадной, методом связанных каналов, спомощью диаграммной техники, в дисперсионной теории и в теории дифракционного рассеяния Глаубера. Преимуществом в использовании глауберовской теории [1] при рассеянии пионов является их малая (по сравнению с нуклонами) масса. Из-за этого отдача нуклонов при рассеянии на них пионов мала, нуклоны остаются почти неподвижными («замороженными») в процессе рассеяния; таким образом, адиабатическое приближение, используемое в теории, выполняется при более низких энергиях.

Целью настоящей работы является вывод матричных элементов упругого рассеяния $\pi^{\pm}$-мезонов на изотопах ^{6,8}He в рамках глауберовской теории при промежуточных (от сотен МэВ до 1 ГэВ) и высоких (выше 1 ГэВ) энергиях. Хотя постановка эксперимента невозможна для рассеяния π-мезонов на нестабильных изотопах ^{6}He,^{8}He, однако прогресс ускорительной техникитак быстр, что то, что сегодня является предсказанием, может быть востребовано в недалеком будущем.

Матричны элементы π^6He- и π^8He-рассеяния

Вероятность πHe-рассеяния в глауберовской теории [1] определяется матричным элементом $M_{if}(\mathbf{q}_{\perp})$

$$M_{if}(\mathbf{q}_{\perp}) = \sum_{M_J M_J'} \frac{ik}{2\pi} \int d\boldsymbol{\rho}_{\perp} d\mathbf{R}_6 \exp(i\mathbf{q}_{\perp}\boldsymbol{\rho}_{\perp}) \delta(\mathbf{R}_6) \left\langle \Psi_i^{JM_J} \middle| \Omega \middle| \Psi_f^{JM_J'} \right\rangle, \quad (1)$$

$\boldsymbol{\rho}_{\perp}$ – прицельный параметр, $\mathbf{R}_6 = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{6}\mathbf{r}_n$ – координата центра масс, $\left\langle \Psi_i^{JM_J} \middle| \Omega \middle| \Psi_f^{JM_J'} \right\rangle$ – матричный элемент перехода из начального-$\Psi_i^{JM_J}$ в конечное $\Psi_f^{JM_J'}$ состояние; индексом «$\perp$» обозначены двумерные векторы, лежащие в плоскости, перпендикулярной направлению столкновения.

Вычислим переданный импульс q в сцм. Исходя из инварианта полной энергии частиц в сцмs = $(P_a + P_b)^2 = (E_a^* + E_b^*)^2$, где a и b– сталкивающиеся частицы, с учетом того что $E_{a,b} = T_{a,b} + m_{a,b}$, получим

$$s = P_a^2 + P_b^2 + 2P_aP_b = m_a^2 + m_b^2 + 2(E_aE_b - p_ap_b) = m_a^2 + m_b^2 + \\ +2\left[(T_a + m_a)(T_b + m_b) + \sqrt{(T_a^2 + 2m_aT_a)(T_b^2 + 2m_bT_b)} \right]$$

Импульс частицв сцм p^*:

$$p^{*2} = E_a^{*2} - m_a^2 = E_b^{*2} - m_b^2 = \\ = \left(\frac{s + m_a^2 - m_b^2}{2\sqrt{s}} \right)^2 - m_a^2$$

Переданный импульс в сцм

$$q = 2p^* \sin\left(\theta^*/2\right).$$

Оператор Ω записывается в виде ряда многократного рассеяния:

$$\Omega = 1 - \prod_{\nu=1}^{A}\left(1 - \omega_{\nu}\left(\boldsymbol{\rho}_{\perp} - \boldsymbol{\rho}_{\perp\nu}\right)\right) = \sum_{\nu=1}^{A}\omega_{\nu} - \sum_{\nu\langle\mu}\omega_{\nu}\omega_{\mu} + \sum_{\nu\langle\mu\langle\eta}\omega_{\nu}\omega_{\mu}\omega_{\eta} + ...(-1)^{A-1}\omega_1\omega_2...\omega_A, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\rho}_{\perp\nu}$ – двумерный аналог трехмерных одночастичных координат нуклонов r_{ν}. Здесь первый член ряда отвечает за однократные соударения частиц, второй − за двукратные, и т.д. до последнего члена, отвечающего за А-кратные соударения. Разложение (2)дает нам удобный способ установления значимости членов однократных соударений и соударений высших порядков. Перечислим основные этапы вычисления матричного элемента.

Основной задачей при вычислении матричного элемента (1) является разделение переменных. Мы используем ВФ ^{6}Не в αnn-модели [2]. Запишем оператор (2) в альтернативном виде, исходя из того, что рассеяниепроисходит на α-частице и двух нейтронах, входящих в ядро^{6}He:

$$\Omega = \omega_{\alpha} + \omega_{n1} + \omega_{n2} - \omega_{\alpha}\omega_{n1} - \omega_{\alpha}\omega_{n2} - \omega_{n1}\omega_{n2} + \omega_{\alpha}\omega_{n1}\omega_{n2}. \quad (3)$$

Профильные функции ω_{ν} зависят от элементарных амплитуд $f_{\pi n}(q)$ и $f_{\pi\alpha}(q)$:

$$\omega_{\alpha}\left(\boldsymbol{\rho}_{\perp} - \mathbf{R}_{\perp\alpha}\right) = \frac{1}{2\pi ik}\int d\mathbf{q}_{\nu\perp} \exp\left(-i\mathbf{q}_{\nu\perp}\left(\boldsymbol{\rho}_{\perp} - \mathbf{R}_{\perp\alpha}\right)\right) f_{\pi\alpha}(q_{\nu}), \quad (4)$$

$$\omega_{n}\left(\boldsymbol{\rho}_{\perp} - \boldsymbol{\rho}_{\nu}\right) = \frac{1}{2\pi ik}\int d\mathbf{q}_{\nu\perp} \exp\left(-i\mathbf{q}_{\nu\perp}\left(\boldsymbol{\rho}_{\perp} - \boldsymbol{\rho}_{\nu}\right)\right) f_{\pi n}(q_{\nu}). \quad (5)$$

Сами элементарные амплитуды в стандартной гауссовской параметризации имеют вид

$$f_{\pi x}(q\ ) = \frac{k\sigma_{\pi x}}{4\pi}\left(i+\varepsilon_{\pi x}\right)\exp\left(-\beta_{\pi x}^{2}q^{\ 2}\Big/2\right), \quad (6)$$

где $x = a, n$; $\sigma_{\pi x}$ – полное сечение рассеяния пиона на нуклоне и на α-частице, $\varepsilon_{\pi x}$ – отношение действительной части амплитуды к мнимой, $\beta_{\pi x}$ – параметр наклона конуса амплитуды. Параметры элементарной амплитуды σ_{pn}^{c}, ε_{pn}^{c}, β_{pn}^{c} являются входными параметрами теории, и определяются они из независимых экспериментов. Сводка параметров πN-амплитуд при разных значениях энергии приведена в работе [3].

Как можно видеть из приведенных формул (3), (4), α-частица считается бесструктурной и рассеяние на ней происходит как на одной частице. Ее составная природа учитывается динамически, когда в αn-взаимодействии используется потенциал с запрещенными состояниями.

Волновая функция ядра ^{6}He с полным угловым моментом J ($J^{\pi} = 0^{+}$, $S = 0$) и его проекцией M_J в αnn-модели записывается [2]:

$$\Psi_{i,f}^{JM_J} = \Psi_{\alpha}(\mathbf{R}_{\alpha})\varphi_{n1}(\mathbf{r}_1)\varphi_{n2}(\mathbf{r}_2)\sum_{\lambda lLS}\Psi_{\lambda lLS}^{JM_J}(\mathbf{r},\mathbf{R}), \quad (7)$$

где $\Psi_{\alpha}(\mathbf{R}_{\alpha})$, $\varphi_{n1,2}(\mathbf{r}_{1,2})$, $\Psi_{\lambda lLS}^{JM_J}(\mathbf{r},\mathbf{R})$ – ВФ α-частицы, нейтрона (n) и относительного движения в координатах Якоби $(\mathbf{r},\mathbf{R})$. Связь их с одночастичными координатами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ выражается следующим образом:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{2}{3}\mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{r} + \mathbf{R}_6,\ \mathbf{r}_2 = \frac{2}{3}\mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{r} + \mathbf{R}_6, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{R}_6 - \frac{1}{3}\mathbf{R},\quad \mathbf{R}_6 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\mathbf{r}_i. \quad (8)$$

В ВФ относительного движения основной вклад дает компонента с конфигурацией λ =0,l=0,L=0,S=0с весом 0.957, вторая компонента λ =1,l=1,L=1,S=1 имеет вес 0.043, остальные компоненты еще меньше [2]:

$$\Psi_{\lambda lLS}^{JM_J}(\mathbf{r},\mathbf{R}) = \Psi_{0000}^{JM_J}(\mathbf{r},\mathbf{R}) + \Psi_{1111}^{JM_J}(\mathbf{r},\mathbf{R}). \quad (9)$$

Парциальные ВФ получены стохастическим вариационным методом и разложены в ряд по многомерным гауссоидам:

$$\Psi_{0000}^{JM_J}(\mathbf{r},\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi}\sum_{i,j} C_{ij}^{00}\exp\left(-\alpha_i\mathbf{r}^2 - \beta_j\mathbf{R}^2\right) \quad (10)$$

$$\Psi_{1111}^{JM_J}(\mathbf{r},\mathbf{R}) = \sum_{m\mu M_L M_S}\langle 1m1\mu|1M_L\rangle\langle 1M_L1M_S|JM_J\rangle Y_{1m}(\mathbf{R})Y_{1\mu}(\mathbf{r})\sum_{i,j} C_{ij}^{11}\, r\, R\exp\left(-\alpha_i\mathbf{r}^2 - \beta_j\mathbf{R}^2\right) (11)$$

После подстановки в профильные функции (4), (5) элементарной амплитуды (6) и интегрирования по импульсу $d\mathbf{q}_{\perp}$, получим:

$$\Omega_n = \omega_n\left(\boldsymbol{\rho}_{\perp} - \boldsymbol{\rho}_{\nu}\right) = F_n\exp(-(\boldsymbol{\rho}_{\perp} - \boldsymbol{\rho}_{\nu})^2\lambda_n), \quad (12)$$

где

$$F_n = \frac{\sigma_{\pi N}}{4\pi(\beta_{\pi N})^2}(1 - i\varepsilon_{\pi N}),\ \lambda_n = \frac{1}{2(\beta_{\pi N})^2}. \quad (13)$$

Аналогично для Ω_{α}, с заменой индекса $n \to \alpha$.

Перепишем оператор Ω (3) от одночастичных координат к относительным. С учетом (12) после некоторых преобразований оператор (3) в относительных координатах (8) будет иметь вид:

$$\Omega(\rho_\perp, R_\perp, r_\perp) = \sum_{k=1}^{7} g_k \exp\left(-a_k\rho_\perp^2 - b_k R_\perp^2 - c_k r_\perp^2 + d_k\rho_\perp R_\perp + e_k\rho_\perp r_\perp + h_k R_\perp r_\perp\right) \quad (14)$$

где суммирование по k означает суммирование по кратностям рассеяния k= 1÷3 – однократные соударения, k= 4÷6 – двукратные, k= 7 – трехкратное. Здесь

$$g_k = (F_n, F_n, F_\alpha, -F_nF_n, -F_nF_\alpha, -F_nF_\alpha, F_nF_nF_\alpha),$$
$$a_k = (\lambda_n, \lambda_n, \lambda_\alpha, 2\lambda_n, (\lambda_n+\lambda_\alpha), (\lambda_n+\lambda_\alpha), (2\lambda_n+\lambda_\alpha)),$$
$$b_k = \frac{1}{9}\left(4\lambda_n, 4\lambda_n, \lambda_\alpha, 8\lambda_n, (4\lambda_n+\lambda_\alpha), (4\lambda_n+\lambda_\alpha), (8\lambda_n+\lambda_\alpha)\right),$$
$$c_k = \frac{1}{4}\left(\lambda_n, \lambda_n, 0, 2\lambda_n, \lambda_n, \lambda_n, 2\lambda_n\right),$$
$$d_k = \frac{4}{3}\left(\lambda_n, \lambda_n, -\frac{1}{2}\lambda_\alpha, 2\lambda_n, \left(\lambda_n - \frac{1}{2}\lambda_\alpha\right), \left(\lambda_n - \frac{1}{2}\lambda_\alpha\right), (2\lambda_n - 2\lambda_\alpha)\right)$$
$$e_k = (\lambda_n, -\lambda_n, 0, 0, \lambda_n, -\lambda_n, 0),$$
$$h_k = \frac{2}{3}\left(-\lambda_n, \lambda_n, 0, 0, -\lambda_n, \lambda_n, 0\right),$$

где F_n, λ_n, F_α, λ_α определены формулами (13) и зависят от параметров элементарных $f_{\pi n}(q)$, $f_{\pi\alpha}(q)$ амплитуд.

Подставив в формулу (1) ВФ (9), (10), (11), запишем матричный элемент как сумму трех слагаемых, зависящих от компонент $\Psi_{0000}^{JM_J}(\mathbf{r},\mathbf{R})$, $\Psi_{1111}^{JM_J}(\mathbf{r},\mathbf{R})$:

$$M_{if}(\mathbf{q}_\perp) = M_{if}^{00}(\mathbf{q}_\perp) + M_{if}^{11}(\mathbf{q}_\perp) + M_{if}^{01}(\mathbf{q}_\perp), \quad (15)$$

где

$$M_{if}^{00}(\mathbf{q}_\perp) = \sum_{M_sM_s'} \frac{ik}{2\pi}\int d\boldsymbol{\rho}_\perp d\mathbf{R}_6 \exp(i\mathbf{q}_\perp\boldsymbol{\rho}_\perp)\delta(\mathbf{R}_6)\left\langle \Psi_{0000}(\mathbf{R},\mathbf{r})\middle|\Omega\middle|\Psi_{0000}(\mathbf{R},\mathbf{r})\right\rangle, \quad (16)$$

$$M_{if}^{11}(\mathbf{q}_\perp) = \sum_{M_sM_s'} \frac{ik}{2\pi}\int d\boldsymbol{\rho}_\perp d\mathbf{R}_6 \exp(i\mathbf{q}_\perp\boldsymbol{\rho}_\perp)\delta(\mathbf{R}_6)\left\langle \Psi_{1111}(\mathbf{R},\mathbf{r})\middle|\Omega\middle|\Psi_{1111}(\mathbf{R},\mathbf{r})\right\rangle, \quad (17)$$

$$M_{if}^{01}(\mathbf{q}_\perp) = \sum_{M_JM_J'} \frac{ik}{2\pi}\int d\boldsymbol{\rho}_\perp d\mathbf{R}_6 \exp(i\mathbf{q}_\perp\boldsymbol{\rho}_\perp)\delta(\mathbf{R}_6)\times$$
$$\left\{\left\langle \Psi_{0000}(\mathbf{R},\mathbf{r})\middle|\Omega\middle|\Psi_{1111}(\mathbf{R},\mathbf{r})\right\rangle + \left\langle \Psi_{1111}(\mathbf{R},\mathbf{r})\middle|\Omega\middle|\Psi_{0000}(\mathbf{R},\mathbf{r})\right\rangle\right\} \quad (18)$$

Приведем пример вычисления $M1_{if}(\mathbf{q}_\perp)$. Подставим в (17) ВФ (11):

$$M_{if}^{11}(\mathbf{q}_\perp) = \frac{ik}{6\pi}\sum_{iji'j'} C_{ij}^{(11)}C_{i'j'}^{(11)} \sum_{mm'\mu\mu'} (-1)^{M_L+M_L'}\left\langle 1m\,1\mu\middle|1M_L\right\rangle\left\langle 1m'\,1\mu'\middle|1M_L'\right\rangle\times$$
$$\times\int d\boldsymbol{\rho}_\perp \exp(i\mathbf{q}_\perp\boldsymbol{\rho}_\perp)\left\langle(-\alpha_i r - \beta_j R)\middle|\Omega\middle|\exp(-\alpha_{i'} r - \beta_{j'} R)\right\rangle\left\langle RY_{1m}(\hat{\mathbf{R}})\middle|RY_{1m'}(\hat{\mathbf{R}})\right\rangle\left\langle rY_{1\mu}(\hat{\mathbf{r}})\middle|rY_{1\mu'}(\hat{\mathbf{r}})\right\rangle. \quad (19)$$

Интегрирование по $d\mathbf{R}_6$ проведено с помощью δ-функции при переходе от одночастичных координат в ВФ к координатам Якоби по формулам (8). Чтобы проинтегрировать выражение (19) по координатам $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$ в декартовой системе координат, перейдем от пространственных сферических гармоник к полиномам по формуле [4]:

$$R^l Y_{lm}\left(\hat{\mathbf{R}}\right) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}(l+m)!(l-m)!}\sum_{u,v,w}\frac{1}{p!t!k!}\left(-\frac{R_x+iR_y}{2}\right)^p\left(\frac{R_x-iR_y}{2}\right)^t R_z^k\,, \tag{20}$$

где $p,\ t,\ k$ - целые положительные числа: $p+t+k= l, p-t= m$; R_x, R_y, R_z – проекции вектора $\mathbf{R}$ на оси декартовой системы координат.

Просуммировав в (19) члены, зависящие от проекций моментов, с учетом (20), получим следующий полином:

$$\begin{aligned}\sum_{mm'\mu\mu'}(-1)^{M_L+M_L'}\left\langle 1m\,1\mu\middle|1M_L\right\rangle\left\langle 1m'\,1\mu'\middle|1M_L'\right\rangle\left\langle RY_{1m}(\hat{\mathbf{R}})\middle|RY_{1m'}(\hat{\mathbf{R}})\right\rangle\left\langle rY_{1\mu}(\hat{\mathbf{r}})\middle|rY_{1\mu'}(\hat{\mathbf{r}})\right\rangle = \\ = R_x^2(r_y^2+r_z^2)+R_y^2r_x^2-2R_xr_x(R_yr_y-R_zr_z)+2R_z^2r_x^2.\end{aligned} \tag{21}$$

Подставив в (19) оператор Ω (14) и полином (21), и разделив переменные, запишем

$$\begin{aligned}M_{if}^{11}(\mathbf{q}_\perp) = \frac{ik}{6\pi}\sum_{iji'j'}C_{ij}^{(11)}C_{i'j'}^{(11)}\sum_{k=1}^{7}g_k\left\{I_x^{(2)}(q_x)I_y(q_y)I_x(q_x)I_y^{(2)}(q_y)I_z + I_x^{(2)}(q_x)I_y(q_y)I_x(q_x)I_y(q_y)I_z^{(2)} + \right.\\ \left. + I_x(q_x)I_y(q_y)I_y^{(2)}(q_y)I_x^{(2)}(q_x)I_z - 2I_x^{(11)}(q_x)I_y^{(11)}(q_y)I_z + 2I_x(q_x)I_y(q_y)I_x^{(2)}(q_x)I_y(q_y)I_z^{(2)})\right\},\end{aligned} \tag{22}$$

где введены следующие обозначения:

$$I_z = \int_{-\infty}^{\infty} dR_z dr_z \exp(-\beta_{jj'}R_z^2-\alpha_{ii'}r_z^2)\,,$$

$$I_z^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} dR_z dr_z R_z^2 \exp(-\beta_{jj'}R_z^2-\alpha_{ii'}r_z^2)\,,$$

$$I_x(q_x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_x dR_x dr_x \exp(-a_k\rho_x^2-b_{kj}R_x^2-c_{ki}r_x^2+d_k\rho_xR_x+e_k\rho_xr_x+h_kR_xr_x+iq_x\rho_x)\,,$$

$$I_x^{(n,m)}(q_x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_x dR_x dr_x R_x^n r_x^m \exp(-a_k\rho_x^2-b_{kj}R_x^2-c_{ki}r_x^2+d_k\rho_xR_x+e_k\rho_xr_x+h_kR_xr_x+iq_x\rho_x),$$

где

$$\alpha_{ii'} = \alpha_i+\alpha_{i'},\quad \beta_{jj'} = \beta_j+\beta_{j'},\quad b_{kj} = b_k+\beta_{jj'},\quad c_{ki} = c_k+\alpha_{ii'}\,.$$

Переменные r_x, r_y, R_x, R_y входят в матричный элемент (22) симметрично, поэтому интегралы по y записываются аналогично. Это интегралы типа Эйлера–Пуассона, которые вычисляются аналитически. Здесь важно отметить, что при таком подходе (записи ВФ и операторов в виде разложения по гауссоидам) возможно рассчитать все матричные элементы аналитически без каких либо упрощений, а значит и без потери точности.

Матричный элемент π^8He-рассеяния вычисляется по другой схеме. Поскольку здесь мы будем подставлять в матричный элементфункцию плотности ядра ^{8}He $\rho(r) = \left|\Psi(r)\right|^2$ [5], то расчет значительно упрощается. В этом случае запишем оператор Ω в виде (2) и ограничимся двумя первыми членами ряда, поскольку известно, что каждый следующий член дает вклад в сечение на порядок меньше предыдущего [1].

Подстановка ряда многократного рассеяния (2) в амплитуду (1) и последующие интегрированияего по прицельному параметру $d\boldsymbol{\rho}$ и импульсам, переданным в каждом акте рассеяния $d\boldsymbol{\rho}_1$, ... $d\boldsymbol{\rho}_\nu$, приводят к следующему результату:

$$\tilde{\Omega}(\boldsymbol{\rho},\mathbf{q}) = \frac{2\pi}{ik} f_{\pi N}(q)\sum_{i=1}^{8} \tilde{\omega}_i - \left(\frac{2\pi}{ik} f_{\pi N}\left(\frac{q}{2}\right)\right)^2 \sum_{i<j=1}^{8} \tilde{\omega}_{ij} + \ldots, \tag{23}$$

где

$$\tilde{\omega}_i = \exp(i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}_i), \quad \tilde{\omega}_{ij} = \exp\left(i\frac{\mathbf{q}}{2}(\boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\rho}_j)\right)\delta(\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j). \tag{24}$$

Матричный элемент (1) запишем как сумму одно- и двукратных соударений. Знак «минус» между слагаемыми появляется оттого, что ряд многократного рассеяния (2) знакопеременный.

$$M_{if}(\mathbf{q}) = M_{if}^{(1)}(\mathbf{q}) - M_{if}^{(2)}(\mathbf{q}), \tag{25}$$

где

$$M_{if}^{(1)}(\mathbf{q}) = f_{\pi N}(q)\sum_{i=1}^{8} \int \left|\Psi(r)\right|^2 \exp(i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}_i)d\mathbf{r}, \tag{26}$$

$$M_{if}^{(2)}(\mathbf{q}) = \left(\frac{2\pi}{ik} f_{\pi N}\left(\frac{q}{2}\right)\right)^2 \sum_{i=1}^{8} \int \left|\Psi(r)\right|^2 \sum_{i<j=1}^{8} \tilde{\omega}_{ij} d\mathbf{r}. \tag{27}$$

Положив $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}$, запишем $\exp(i\mathbf{qr})$ в виде разложения в ряд по функциям Бесселя

$$\exp(i\mathbf{qr}) = 4\pi \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} (i)^\lambda \sqrt{\frac{\pi}{2qr_\nu}} J_{\lambda+1/2}(qr) Y_{\lambda\mu}(\Omega_q) Y_{\lambda\mu}(\Omega_r). \tag{28}$$

Тогда интегралы (26), (27) можно вычислить в сферической системе координат. Для однократного рассеяния, учитывая, что πn-столкновений6, πp-столкновений 2, получим

$$M_{if}^{(1)}(q) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2q}}\left\{ 6 f_{\pi n}(q)\int_0^\infty \left|\Psi_{\pi n}(r)\right|^2 J_{1/2}(qr) r^{3/2} dr + 2 f_{\pi p}(q)\int_0^\infty \left|\Psi_{\pi p}(r)\right|^2 J_{1/2}(qr) r^{3/2} dr \right\} \tag{29}$$

Для двукратного рассеяния, учитывая, что πn-столкновений 15, πp-столкновений 13, получим

$$M_{if}^{(2)}(q) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2q}}\left\{ 15 f_{\pi n}^2(q/2)\int_0^\infty \left|\Psi_{\pi n}(r)\right|^2 J_{1/2}(qr) r^{3/2} dr + 13 f_{\pi p}^2(q/2)\int_0^\infty \left|\Psi_{\pi p}(r)\right|^2 J_{1/2}(qr) r^{3/2} dr \right\} \tag{30}$$

Дифференциальное сечение есть квадрат модуля матричного элемента

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2J+1}\left|M_{if}(\mathbf{q})\right|^2. \tag{31}$$

Чтобы вычислить парциальные сечения для π^6He необходимо в операторе Ω (14) учесть соответствующие члены разложения (k= 1÷3 для однократных соударений, k=4÷6, для двукратных, k=7 для трехкратного) и вычислить с ними матричные элементы (16) - (18). Полный ряд

(14) даст суммарное сечение. Для π^8He достаточно в (31) подставить выражение (25), с учетом (29), (30).

Заключение

В работе выведены матричные элементы $\pi^{6,8}$He-рассеяния в рамках глауберовской теории. При выводе матричных элементов для ядра ^{6}He принимались в расчет два условия: трехчастичная ВФ в αnn-модели для ^{6}He и разложение глауберовского оператора Ω в ряд соударений на α-кластере и нуклонах. Разложив глауберовский оператор в ряд, сопряженный трехчастичной ВФ ^{6}He, мы рассчитали суммарное ДС с учетом всех кратностей соударений и парциальные ДС, соответствующие одно-, двух- и трехкратным соударениям. Матричные элементыдля^{8}He вычислены с ВФ в LSSM, соператором Ω в которомучтены одно- и двукратные соударения. Это позволило рассчитать амплитуды рассеяния аналитически, не прибегая к численному интегрированию. Как показано в предыдущих работахпо рассеянию протонов на ядрах $^{6-9}$Li [3], ^{6,8}He [6], основной вклад в сечение при малых переданных импульсах дают однократные соударения, а при больших переданных импульсах вклады высших порядков значительны и должны учитываться.

Литература

1 Глаубер Р.Теория столкновений адронов высокой энергии с ядрами // Успехи физических наук. –1971. – Т.103. – Вып.4. – С.641-673.

2 Кукулин В.И., Краснопольский В.М., Ворончев В.Т., Сазонов П.В. Детальное изучение кластерной структуры легких ядер в модели трех тел: (II). Спектр низколежащих состояний ядер с A=6 // Ядерная физика A. – 1986. – Т.453. – Вып. 3. – С.365-388

3 Кукулин В.И., Померанцев В.И., Разиков Х.Д. и др. Детальное изучение кластерной структуры легких ядер в модели трех тел: (IV). Расчет большого пространства ядер с A=6 с реалистичными ядерными силами // Ядерная физика A. – 1995. – Т.586. – Вып.1. – С.151-189

4 Ибраева Е.Т. Рассеяние $\pi^{\pm}$- и K^+- мезонов на легких кластеризованных ядрах // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 2003. – Т.34. – Вып.2. – С.269-331.

5 Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.Квантовая теория углового момента. – Л.: Наука. – Ленинградское отд. – 1975. – 439 с.

6 Каратаглидис С., Дортманс П., Амос К., Беннхолд С. Альтернативные оценки сияния в ядрах // Физический обзор С. – 2000. – Т.61. – 024319.

7 Антонов А.Н., Кадрев Д.Н., Гайдаров М.К. и др. Заряды, распределение материи и форм-факторы легких, средних и тяжелых ядер // Физический обзор С. – 2005. – Т. 72. – 044307.

8 Ибраева Е.Т., Имамбеков О., Джазаиров-Кахарманов А. Расчет p^6He и p^8He упругого рассеяние в глауберовской аппроксимации // Международный журнал современной физики E. – 2013. – Т.22. –1350017-1-1350075.

References

1 Glauber R.Teorija stolknovenij adronov vysokoj jenergii s jadrami // Uspehi fizicheskih nauk. –1971. – T.103. – Vyp. 4. – S. 641-673.

2 Kukulin V.I., Krasnopol'skij V.M., Voronchev V.T., Sazonov P.V. Detal'noe izuchenie klasternoj struktury leg-kih jader v modeli treh tel: (II). Spektr nizkolezhashhih sostojanij jader s A=6 // Jadernaja fizika A. – 1986. – T. 453. – Vyp. 3. – S. 365-388.

3 Kukulin V.I., Pomerancev V.I., Razikov H.D. i dr.Detal'noe izuchenie klasternoj struktury legkih jader v mo-deli treh tel: (IV).Raschet bol'shogo prostranstva jader s A=6 s realistichnymi jadernymi silami // Jadernaja fizika A. – 1995. – T.586. – Vyp.1. – S.151-189

4 Ibraeva E.T.Rassejanie π±- i K+- mezonov na legkih klasterizovannyh jadrah // Fizika jelementarnyh chastic i atom-nogo jadra. – 2003. – T.34. – Vyp.2. – S.269-331.

5 Varshalovich D.A., Moskalev A.N., Hersonskij V.K.Kvantovaja teorija uglovogo momenta. – L.: Nauka. – Leningradskoe otd. – 1975. –439 s.

6 Karataglidis S., Dortmans P., Amos K., Bennhold S. Al'ternativnye ocenki sijanija v jadrah // Fizicheskij obzor S. –2000. – T.61. – 024319.

7 Antonov A.N., Kadrev D.N., Gajdarov M.K. i dr. Zarjady, raspredelenie materii i form-faktory legkih, srednih i tjazhelyh jader // Fizicheskij obzor S. – 2005. – T.72. – 044307.

8 Ibraeva E.T., Imambekov O., Dzhazairov-Kaharmanov A. Raschet r6Ne i r8Ne uprugogo rassejanie v glauberovskoj approksimacii // Mezhdunarodnyj zhurnal sovremennoj fiziki E. – 2013. – T.22. –1350017-1-1350075.