

Жусупов М.А., Ибраева Е.Т.,  
Кабатаева Р.С.,  
Жаксыбекова К.А.,  
Темирбаев Д., Кажыкенов Ш.

**Упругое рассеяние протонов  
на ядрах  $^{13}\text{C}$  и  $^{15}\text{C}$   
в дифракционной теории**

В настоящей статье рассчитываются дифференциальные поперечные сечения рассеяния протонов на изотопах  $^{13}\text{C}$  и  $^{15}\text{C}$  при энергии 1 ГэВ с волновыми функциями модели оболочек в рамках теории Глаубера. В операторе многократного рассеяния были учтены однократные, двукратные и трехкратные столкновения. Были оценены роль каждого члена в ряде и их интерференция в дифференциальном поперечном сечении. Показано, что для описания сечений в широком диапазоне углов/переданного импульса необходимо рассматривать не только столкновения первого порядка, но и столкновения более высоких порядков. Рассчитав вклад в дифференциальное сечение от первых трех членов ряда многократного рассеяния, авторы показали, что однократные соударения доминируют при самых малых углах рассеяния, до  $\theta < 12^\circ$ , двукратные – в области второго максимума в сечении  $20^\circ > \theta > 12^\circ$ , трехкратные – в области третьего максимума при  $\theta < 20^\circ$ . В точках пересечения разных кратностей рассеяния в дифференциальных сечениях появляются характерные интерференционные минимумы поскольку ряд многократного рассеяния знакопеременный и перекрестные члены вычитаются из общей суммы.

**Ключевые слова:** дифракционная теория Глаубера, многократное рассеяние, рассеяние протонов, изотопы углерода, упругое рассеяние.

Zhusupov M.A., Ibrayeva Ye.T.,  
Kabatayeva R.S.,  
Zhakysbekova K.A.,  
Temirbayev D., Kazhykenov Sh.

**Elastic proton scattering  
on  $^{13}\text{C}$  and  $^{15}\text{C}$  nuclei in the  
diffraction theory**

There is a calculation of the differential cross sections of proton scattering on  $^{13}\text{C}$  and  $^{15}\text{C}$  nuclei at energy of 1 GeV with the shell model wave functions in the framework of the Glauber theory in the study. The single, double and triple collisions have been taken into account in the multiple scattering operator. The role of each term of the series and their interference in the differential cross section have been estimated. It is shown that for a description of the cross sections in a wide angle/momentum transfer range it is necessary to consider not only the first, but the higher scattering orders. Having calculated the contribution into the differential cross sections from the first three terms of the series of multiple scattering, the authors showed that the single scattering dominates at the very small angles (until 12 degrees), double – in the range of the second maximum (from 12 to 20 degrees), triple – in the range of the third maximum at  $20^\circ$  and more degrees. In the points of intersection of the different orders in the differential cross sections there appear the typical interference minimums since the series of multiple scattering is a sign-alternating one and the cross terms are subtracted from the total sum.

**Key words:** Glauber diffraction theory, multiple scattering, proton scattering, carbon isotopes, elastic scattering.

Жүсіпов М.А., Ибраева Е.Т.,  
Қабатаева Р.С.,  
Жақсыбекова К.А.,  
Темирбаев Д., Қажыкенов Ш.

**Дифракциялық теория  
шеңберінде протондардың  
 $^{13}\text{C}$  және  $^{15}\text{C}$  ядроларындағы  
серпінді шашырауы**

Бұл мақалада протондардың  $^{13}\text{C}$  және  $^{15}\text{C}$  изотоптарында шашырау дифференциалдық көлденең қималары есептелді, ядролардың толқындық функциялары қабықшалар моделінде алынды, Глаубер теориясының шеңберінде. Көп реттік шашырау операторында бірреттік, екіреттік және үшреттік соқтығысулар ескерілді. Қатардағы әр мүшенің ролі және дифференциалдық қимадағы интерференциялары бағаланды. Қималарды кең бұрыштық/берілген импульс диапазонында сипаттау үшін тек гана бір реттік, бірақ сонымен қатар жоғары реттік соқтығысуларды қарастыру керек. Көпреттік шашырау қатарындағы бірінші үш мүшесінің үлесін есептеп, бірреттік шашырау кіші бұрыштар, екіреттік шашырау ортанғы бұраштыр, ал үшреттік шашырау үлкенірек бұрыштарда рольдерін маңызды екені көрсетілді. Шашыраудың әр түрлі реттерінің қиылысу нүктелерінде дифференциалдық қималарында интерференциялық минимумдар пайда болады, себебі көпреттік шашырау қатарының таңбасы өзгеріп тұрады және қиылысқан мүшелер толық суммадан алынады.

**Түйін сөздер:** Глаубер дифракциялық теориясы, көп реттік шашырау, протондардың шашырауы, көміртегі изотоптары, серпінді шашырау.

## УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ПРОТОНОВ НА ЯДРАХ <sup>13</sup>C И <sup>15</sup>C В ДИФРАКЦИОННОЙ ТЕОРИИ

### Введение

В настоящее время теория многократного рассеяния Глаубера является наиболее обоснованной теорией в ядерной физике. Она позволяет получить амплитуду рассеяния нуклона на ядре как сумму амплитуд рассеяния на отдельных нуклонах ядра. Последние находятся из экспериментальных данных по нуклон-нуклонному рассеянию. В теории последовательно учитываются рассеяния различной кратности: однократные, двукратные и т.д., а также эффекты, связанные с интерференцией амплитуд разной кратности.

В модели оболочек структура основных состояний ядер  $C^{13}$  и  $C^{15}$  различна [1]. Если основное состояние ядра  $C^{13}$  имеет конфигурацию  $| (1s)^4 (1p)^9: J^\pi, T = 1/2^-, 1/2 >$ , то ядро  $C^{15}$  в основном состоянии есть  $| (1s)^4 (1p)^{10} 2s_{1/2}: J^\pi, T = 1/2^+, 3/2 >$ . Структура  $C^{15}$  в основном состоянии близка к структуре возбужденного состояния в ядре  $C^{13}$  с  $J^\pi = 1/2^+$  при  $E \sim 4$  МэВ и имеет вид  $| (1s)^4 (1p)^8 2s_{1/2}: J^\pi, T = 1/2^+, 1/2 >$ .

Целью настоящей работы является «микроскопический» расчет и анализ дифференциальных поперечных сечений рассеяния протонов на ядрах  $^{13}C$  и  $^{15}C$  в рамках глауберовской теории с волновыми функциями в модели оболочек при энергии 1 ГэВ, а также исследование интерференционных эффектов в глауберовском операторе многократного рассеяния.

### Краткий формализм

В глауберовской теории дифракционного рассеяния вычислены матричные элементы  $p^{13}C$  - рассеяния при энергии 1 ГэВ. Аналогичный расчет для  $p^{15}C$  - рассеяния проведен в нашей работе [2]. Входными параметрами теории являются волновые функции и параметры протон-нуклонных амплитуд, извлекаемые обычно из независимых экспериментов.

Волновая функция в модели оболочек для ядра  $^{13}\text{C}$  представлена конфигурацией:  $|(1s)^4(1p)^9\rangle$  для основного состояния [1].

Оболочечную волновую функцию представим в виде

$$\Psi_{i,f}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{13}) = |(1s)^4(1p)^9\rangle = \Psi_{n_0 l_0 m_0}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_4) \Psi_{n_1 l_1 m_1}(\vec{r}_5, \dots, \vec{r}_{13}), \quad (1)$$

где  $n_i l_i m_i$  – квантовые числа соответствующей оболочки ( $n_0 = 0, l_0 = 0, m_0 = 0; n_1 = 1, l_1 = 1, m_1 = 0, \pm 1$ ). Каждая функция есть произведение

одночастичных  $\Psi_{nlm}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots) = \prod_i \Psi_{nlm}(\vec{r}_i)$ .

Матричный элемент (амплитуда)

$$M_{if}(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2\vec{\rho} \exp(i\vec{q}\vec{\rho}) \langle \Psi_f^{JM_f} | \Omega | \Psi_i^{JM_i} \rangle, \quad (2)$$

$\vec{q}$  – переданный в реакции импульс:

$$\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}', \quad (3)$$

$\vec{k}, \vec{k}'$  – импульсы налетающего и вылетевшего протона. В случае упругого рассеяния  $|\vec{k}| = |\vec{k}'|$  и импульс  $q$  равен:

$$q = 2k \sin \frac{\theta}{2}, \quad k = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}, \quad (4)$$

Оператор многократного рассеяния:

$$\Omega = 1 - \prod_{v=1}^A (1 - \omega_v(\vec{\rho} - \vec{\rho}_v)) = \sum_{v=1}^{13} \omega_v - \sum_{v\langle\mu=1} \omega_v \omega_\mu + \sum_{v\langle\mu\langle\eta=1} \omega_v \omega_\mu \omega_\eta - \dots (-1)^{12} \omega_1 \omega_2 \dots \omega_A \quad (5)$$

Ограничившись трехкратными соударениями, подставив оператор в формулу (2) и проинтегрировав его по  $d\vec{\rho}, d\vec{q}_1, \dots, d\vec{q}_k$ , получим

$$M_{if}^{(1)}(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \left\langle \prod_{i=1}^4 \Psi_{000}(\vec{r}_i) \prod_{j=5}^{13} \Psi_{11m}(\vec{r}_j) \left| \sum_{i=1}^4 \tilde{\omega}_i + \sum_{j=5}^{13} \tilde{\omega}_j \right| \prod_{i=1}^4 \Psi_{000}(\vec{r}_i) \prod_{j=5}^{13} \Psi_{11m}(\vec{r}_j) \right\rangle \quad (14)$$

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}^{(1)} - \tilde{\Omega}^{(2)} + \tilde{\Omega}^{(3)} = \frac{2\pi}{ik} f_{pN}(q) \sum_{i=1}^A \tilde{\omega}_i - \left( \frac{2\pi}{ik} f_{pN} \left( \frac{q}{2} \right) \right)^2 \sum_{i\langle j=1}^A \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j + \left( \frac{2\pi}{ik} f_{pN} \left( \frac{q}{3} \right) \right)^3 \sum_{i\langle j\langle k=1}^A \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_k - \dots \quad (6)$$

Знак «тильда» над операторами означает проведенные интегрирования.

$$\sum_{i=1}^{13} \tilde{\omega}_i = \sum_{i=1}^{13} \exp(i\vec{q}\vec{\rho}_i), \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{13} \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j = \sum_{i\langle j=1}^{13} \exp\left(i\frac{\vec{q}}{2}(\vec{\rho}_i + \vec{\rho}_j)\right) \delta(\vec{\rho}_i - \vec{\rho}_j), \quad (8)$$

$$\sum_{i\langle j\langle k=1}^{13} \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_k = \sum_{i\langle j=1}^{13} \exp\left(i\frac{\vec{q}}{3}(\vec{\rho}_i + \vec{\rho}_j + \vec{\rho}_k)\right) \times \delta(\vec{\rho}_i - \vec{\rho}_j) \delta\left(\vec{\rho}_k - \frac{1}{2}(\vec{\rho}_i + \vec{\rho}_j)\right) \quad (9)$$

Матричный элемент (2) в приближении трехкратного рассеяния:

$$M_{if}(\vec{q}) = M_{if}^{(1)}(\vec{q}) - M_{if}^{(2)}(\vec{q}) + M_{if}^{(3)}(\vec{q}), \quad (10)$$

где

$$M_{if}^{(1)}(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \left\langle \Psi_f \left| \sum_{v=1}^A \tilde{\omega}_v \right| \Psi_i \right\rangle, \quad (11)$$

$$M_{if}^{(2)}(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \left\langle \Psi_f \left| \sum_{v\langle\tau} \tilde{\omega}_v \tilde{\omega}_\tau \right| \Psi_i \right\rangle, \quad (12)$$

$$M_{if}^{(3)}(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \left\langle \Psi_f \left| \sum_{i\langle j\langle k}^{13} \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_k \right| \Psi_i \right\rangle. \quad (13)$$

Матричный элемент однократного рассеяния:

$$M_{if}^{(1)}(\vec{q}) = 4 N_{11} M_{if}^{(1)-s}(\vec{q}) + 9 N_{00} M_{if}^{(1)-p}(\vec{q}), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} M_{if}^{(1)-s}(\vec{q}) &= \\ &= \frac{ik}{2\pi} \left\langle \prod_{i=1}^4 \Psi_{000}(\vec{r}_i) \left| \sum_{i=1}^4 \tilde{\omega}_i \left| \prod_{i=1}^4 \Psi_{000}(\vec{r}_i) \right. \right. \right\rangle, \quad (16) \\ &= \frac{ik}{2\pi} \int \prod_{i=1}^4 |\Psi_{000}(\vec{r}_i)|^2 \sum_{i=1}^4 \tilde{\omega}_i d\vec{r}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{if}^{(1)-p}(\vec{q}) &= \\ &= \frac{ik}{2\pi} \left\langle \prod_{i=5}^{13} \Psi_{11m}(\vec{r}_i) \left| \sum_{i=5}^{13} \tilde{\omega}_i \left| \prod_{i=5}^{13} \Psi_{11m}(\vec{r}_i) \right. \right. \right\rangle, \quad (17) \\ &= \frac{ik}{2\pi} \int \prod_{i=5}^{13} |\Psi_{11m}(\vec{r}_i)|^2 \sum_{i=5}^{13} \tilde{\omega}_i d\vec{r}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{00} &= \left\langle \prod_{i=1}^4 \Psi_{000}(\vec{r}_i) \left| \prod_{i=1}^4 \Psi_{000}(\vec{r}_i) \right. \right\rangle, \\ N_{11} &= \left\langle \prod_{i=5}^{13} \Psi_{11m}(\vec{r}_i) \left| \prod_{i=5}^{13} \Psi_{11m}(\vec{r}_i) \right. \right\rangle. \quad (18) \end{aligned}$$

$M_{if}^{(1)-s}(\vec{q})$  – рассеяние на нуклонах 1s-оболочки (4 чл.),  $M_{if}^{(1)-p}(\vec{q})$  – на нуклонах 1p-оболочки (9 чл.),  $N_{00}, N_{11}$  – нормировки волновых функций.

Вычисление этих матричных элементов с волновыми функциями в модели оболочек в сферической системе координат с заменой двумерного вектора  $\vec{\rho}$  на трехмерный  $\vec{r}$  и разложением  $\exp(i\vec{q}\vec{\rho}_i)$  в ряд по функциям Бесселя  $J_{\lambda+\frac{1}{2}}(qr)$  и сферическим гармоникам  $Y_{\lambda\mu}(\hat{q})$  приведет к следующему результату:

$$M_{if}^{(1)-s}(q) = 4N_{00}^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{2q}} \int_0^\infty |R_{00}(r)|^2 J_{\frac{1}{2}}(qr) r^{\frac{3}{2}} dr, \quad (19)$$

$$M^{(1)-p}(\vec{q}) = 10(N_{11m})^{\%0} \sqrt{\frac{\pi}{2q}} \sqrt{4\pi} \sum_{\lambda\mu m} (i)^\lambda \sqrt{2\lambda+1} B_{11}^{(\lambda)}(q) \langle \lambda 0 1 0 | 1 0 \rangle \langle \lambda \mu 1 m' | 1 m \rangle Y_{\lambda\mu}(\hat{q}), \quad (20)$$

где

$$B_{11}^{(\lambda)}(q) = \int_0^\infty |R_{11}(r)|^2 J_{\lambda+\frac{1}{2}}(qr) r^{\frac{3}{2}} dr. \quad (21)$$

Радиальные волновые функции

$$R_{00} = C_{00} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right), \quad C_{00} = \frac{2}{\pi^{\frac{1}{4}} r_0^{\frac{3}{2}}}, \quad (22)$$

$$R_{11} = C_{11} \frac{r}{r_0} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right), \quad C_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}} C_{00}. \quad (23)$$

Здесь  $r_0$  связан с осцилляторным параметром  $\hbar\omega$  соотношением

$$r_0^2 = \frac{\hbar}{m\omega} = \frac{(\hbar c)^2}{mc^2 \hbar\omega} = \frac{(1.97 \cdot 10^{-11} \text{ МэВ} \cdot \text{см})^2}{940 \text{ МэВ} \cdot 14 \text{ МэВ}}.$$

Для ядер 1p-оболочки  $\hbar\omega = 13,8$  МэВ [3].

Матричный элемент двукратного рассеяния

$$M_{if}^{(2)}(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \left\langle \prod_{i=1}^4 \Psi_{000}(\vec{r}_i) \prod_{j=5}^{13} \Psi_{11m}(\vec{r}_j) \left| \sum_{i<j=1}^4 \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j + \sum_{i=1}^4 \tilde{\omega}_i \sum_{j=5}^{13} \tilde{\omega}_j + \sum_{i=5}^{12} \tilde{\omega}_i \sum_{j=6}^{13} \tilde{\omega}_j \right| \prod_{i=1}^4 \Psi_{000}(\vec{r}_i) \prod_{j=5}^{13} \Psi_{11m'}(\vec{r}_j) \right\rangle \quad (24)$$

$$M_{if}^{(2)}(\vec{q}) = 6M_{000}^{(2)-ss}(q) N_{11} + 36M_{0011}^{(2)-sp}(\vec{q}) + 36M_{11}^{(2)-pp}(\vec{q}) N_{00}, \quad (25)$$

$$M_{if}^{(2)-ss}(\vec{q}) = \frac{2\pi}{k} f_{pN}^2 \left(\frac{q}{2}\right) \left\langle \prod_{i=1}^4 \Psi_{000}(\vec{r}_i) \left| \sum_{i<j=1}^4 \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j \right| \prod_{i=1}^4 \Psi_{000}(\vec{r}_i) \right\rangle =$$

$$= \frac{2\pi}{k} f_{pN}^2 \left(\frac{q}{2}\right) \int \prod_{i=1}^4 |\Psi_{000}(\vec{r}_i)|^2 \sum_{i<j=1}^4 \exp\left(i\frac{\vec{q}}{2}(\vec{r}_i + \vec{r}_j)\right) \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \prod_{i=1}^4 d\vec{r}_i \quad (26)$$

$$M_{if}^{(2)-sp}(\vec{q}) = \frac{2\pi}{k} f_{pN}^2 \left(\frac{q}{2}\right) \left\langle \prod_{i=1}^4 \Psi_{000}(\vec{r}_i) \left| \sum_{i=1}^4 \tilde{\omega}_i \right| \prod_{i=1}^4 \Psi_{000}(\vec{r}_i) \right\rangle \left\langle \prod_{i=5}^{13} \Psi_{11m}(\vec{r}_i) \left| \sum_{j=5}^{13} \tilde{\omega}_j \right| \prod_{i=5}^{13} \Psi_{11m'}(\vec{r}_i) \right\rangle =$$

$$= \frac{2\pi}{k} f_{pN}^2 \left(\frac{q}{2}\right) (M^{(1)-s} + M^{(1)-p}) \quad (27)$$

$$M_{if}^{(2)-pp}(\vec{q}) = \frac{2\pi}{k} f_{pN}^2 \left(\frac{q}{2}\right) \left\langle \prod_{i=5}^{13} \Psi_{11m}(\vec{r}_i) \left| \sum_{i<j=5}^{13} \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j \right| \prod_{i=5}^{13} \Psi_{11m'}(\vec{r}_i) \right\rangle =$$

$$= \frac{2\pi}{k} f_{pN}^2 \left(\frac{q}{2}\right) \int \prod_{i=5}^{13} |\Psi_{11m}(\vec{r}_i)|^2 \sum_{i<j=5}^{13} \exp\left(i\frac{\vec{q}}{2}(\vec{r}_i + \vec{r}_j)\right) \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \prod_{i=5}^{13} d\vec{r}_i \quad (28)$$

где  $M_{if}^{(2)-ss}(\vec{q})$ ,  $M_{if}^{(2)-sp}(\vec{q})$ ,  $M_{if}^{(2)-pp}(\vec{q})$  – соударения протона с нуклонами на (1s), (1s, 1p), (1p)-оболочках. Обозначим  $C^{(2)} = \frac{2\pi}{k} f_{pN}^2 \left(\frac{q}{2}\right)$ .

Применив ту же технику, что при вычислении матричного элемента однократного рассеяния, окончательно получим

$$M_{if}^{(2)-ss}(q) = 4 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2q}} C^{(2)} \int_0^\infty |R_{00}(r)|^2 J_{1/2}(qr) r^{3/2} dr. \quad (29)$$

$$M_{if}^{(2)-pp} = 36 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2q}} C^{(2)} \sum_{\lambda\mu m} B_{11}^{(\lambda)}(q) F_{\lambda\mu}(\hat{q}), \quad (30)$$

где

$$B_{11}^{(\lambda)}(q) = \int_0^\infty |R_{11}(r)|^2 J_{\lambda+1/2}(qr) r^{3/2} dr, \quad (31)$$

$$F_{\lambda\mu}(\hat{q}) = \int Y_{1m}(\hat{r}) Y_{1m'}^*(\hat{r}) Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) d\Omega_r Y_{\lambda\mu}(\hat{q}) =$$

$$= \sum_{\lambda\mu m} \sqrt{\frac{(2\lambda+1)}{4\pi}} \langle 10\lambda 0 | 10 \rangle \langle 1m\lambda\mu | 1m' \rangle Y_{\lambda\mu}(\hat{q}) \quad (32)$$

Матричный элемент трехкратного рассеяния

$$M_{if}^{(3)}(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \left\langle \Psi_{000}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_4) \Psi_{11m_1}(\vec{r}_5, \dots, \vec{r}_{13}) \left| \tilde{\Omega}^{(3)} \right| \Psi_{000}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_4) \Psi_{11m_1}(\vec{r}_5, \dots, \vec{r}_{13}) \right\rangle \prod_{v=1}^4 d\vec{r} \quad (33)$$

Оператор трехкратного рассеяния

$$\tilde{\Omega}^{(3)} = \sum_{i<j<k} \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_k = \left\{ \sum_{i<j<k=1}^4 \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_k + \sum_{i<j=1}^4 \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j \sum_{k=5}^{13} \tilde{\omega}_k + \sum_{v=1}^4 \tilde{\omega}_v \sum_{j<k=5}^{13} \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_k + \sum_{i<j<k=5}^{13} \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_k \right\} \quad (34)$$

Такое представление оператора  $\tilde{\Omega}^{(3)}$  позволяет рассчитать вклад в дифференциальные сечения от перерассеяний на разных оболочках

$$M_{if}^{(3)}(q) = 4 M_{if}^{(3)-sss}(q) + 54 M_{if}^{(3)-ssp}(q) + 144 M_{if}^{(3)-spp}(q) + 84 M_{if}^{(3)-ppp}(q), \quad (35)$$

где

$$M_{if}^{(3)-sss}(q) = \left(\frac{2\pi}{ik_0}\right)^3 4f_{pN}^3\left(\frac{q}{3}\right) \left\langle \Psi_f \left| \sum_{i<j<k=1}^4 \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_k \right| \Psi_i \right\rangle = \left(\frac{2\pi}{ik_0}\right)^3 4f_{pN}^3\left(\frac{q}{3}\right) \times \left\langle \prod_{i=1}^4 \Psi_{000}(\vec{r}_i) \left| \sum_{i<j<k=1}^4 \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_k \right| \prod_{i=1}^4 \Psi_{000}(\vec{r}_i) \right\rangle \quad (36)$$

$$M_{if}^{(3)-ssp}(\vec{q}) = \left(\frac{2\pi}{ik_0}\right)^3 54f_{pN}^3\left(\frac{q}{3}\right) \left\langle \Psi_f \left| \sum_{\nu<\tau=1}^4 \tilde{\omega}_\nu \tilde{\omega}_\tau \sum_{\varepsilon=5}^{13} \tilde{\omega}_\varepsilon \right| \Psi_i \right\rangle = \left(\frac{2\pi}{ik_0}\right)^3 54f_{pN}^3\left(\frac{q}{3}\right) \times \left\langle \prod_{i=1}^4 \Psi_{000}(\vec{r}_i) \prod_{i=5}^{13} \Psi_{11m}(\vec{r}_i) \left| \sum_{\nu<\tau=1}^4 \tilde{\omega}_\nu \tilde{\omega}_\tau \sum_{\varepsilon=5}^{13} \tilde{\omega}_\varepsilon \right| \prod_{i=1}^4 \Psi_{000}(\vec{r}_i) \prod_{k=5}^{13} \Psi_{11m'}(\vec{r}_k) \right\rangle \quad (37)$$

$$M_{if}^{(3)-spp}(\vec{q}) = \left(\frac{2\pi}{ik_0}\right)^3 144f_{pN}^3\left(\frac{q}{3}\right) \left\langle \Psi_f \left| \sum_{\nu=1}^4 \tilde{\omega}_\nu \sum_{\tau<\varepsilon=5}^{13} \tilde{\omega}_\tau \tilde{\omega}_\varepsilon \right| \Psi_i \right\rangle = \left(\frac{2\pi}{ik_0}\right)^3 144f_{pN}^3\left(\frac{q}{3}\right) \times \left\langle \prod_{i=1}^4 \Psi_{000}(\vec{r}_i) \prod_{i=5}^{13} \Psi_{11m}(\vec{r}_i) \left| \sum_{\nu=1}^4 \tilde{\omega}_\nu \sum_{\tau<\varepsilon=5}^{13} \tilde{\omega}_\tau \tilde{\omega}_\varepsilon \right| \prod_{i=1}^4 \Psi_{000}(\vec{r}_i) \prod_{k=5}^{13} \Psi_{11m'}(\vec{r}_k) \right\rangle \quad (38)$$

$$M_{if}^{(3)-ppp}(\vec{q}) = \left(\frac{2\pi}{ik_0}\right)^3 84f_{pN}^3\left(\frac{q}{3}\right) \left\langle \Psi_f \left| \sum_{\nu<\tau<\varepsilon=5}^{13} \tilde{\omega}_\nu \tilde{\omega}_\tau \tilde{\omega}_\varepsilon \right| \Psi_i \right\rangle = \left(\frac{2\pi}{ik_0}\right)^3 84f_{pN}^3\left(\frac{q}{3}\right) \times \left\langle \prod_{i=5}^{13} \Psi_{11m}(\vec{r}_i) \left| \sum_{\nu<\tau<\varepsilon=5}^{13} \tilde{\omega}_\nu \tilde{\omega}_\tau \tilde{\omega}_\varepsilon \right| \prod_{k=5}^{13} \Psi_{11m'}(\vec{r}_k) \right\rangle \quad (39)$$

Верхние буквенные индексы обозначают оболочку. Коэффициенты перед амплитудами показывают, сколько трехкратных перерассейаний испытает протон с нуклонами из разных оболочек.

После разделения переменных и интегрирования в сферической системе координат получим окончательные выражения для матричных элементов трехкратных соударений:

$$M_{if}^{(3)-sss}(\vec{q}) = D_1(q) \int \exp(-3r^2/r_0^2) J_{\lambda/2}(qr) r^{\lambda/2} dr, \quad (40)$$

$$D_1(q) = F(q) \frac{4C_{00}^2}{2^2 \pi^{3/2}},$$

$$F(q) = \left(\frac{2\pi}{ik_0}\right)^3 f_{pN}^3\left(\frac{q}{3}\right) \frac{1}{\sqrt{2q}},$$

$$M_{if}^{(3)-ssp}(\vec{q}) = D_2(q) \sum_{\lambda\mu mm'} (i)^\lambda \sqrt{(2\lambda+1)} \langle \lambda 0 1 0 | 1 0 \rangle \langle \lambda \mu 1 m | 1 m' \rangle Y_{\lambda\mu}(\Omega_q) \times \int \exp(-3r^2/r_0^2) J_{\lambda+1/2}(qr) r^{\lambda+1/2} dr, \quad (41)$$

$$D_2(q) = F(q) \frac{54 C_{00}^2 C_{11}^2}{2^3 \pi r_0^2},$$

$$M_{if}^{(3)-spp}(\vec{q}) = D_3(q) \sum_{\lambda\mu m m'} \sum_{L M L' M'} (i)^\lambda (-1)^{m'} \sqrt{(2\lambda+1)} \langle 1010 | L'0 \rangle \langle L'010 | L0 \rangle \langle \lambda 0 L0 | 10 \rangle \times \langle 1m_1 1m_2 | L'M' \rangle \langle L'M'1 - m'_1 | LM \rangle \langle \lambda\mu LM | 1m'_1 \rangle Y_{\lambda\mu}(\Omega_q) \int \exp(-3r^2/r_0^2) J_{\lambda+\frac{1}{2}}(qr) r^{1/2} dr, \quad (42)$$

$$D_3(q) = F(q) \frac{144 C_{00}^2 C_{11}^2}{2\pi r_0^4},$$

$$M_{if}^{(3)-ppp}(\vec{q}) = D_4(q) \sum_{\lambda\mu m m'} \sum_{L M L' M'} \sum_{K N K' N'} (i)^\lambda (-1)^{m'_1+m'_2+m'_3+N} \frac{\sqrt{(2\lambda+1)}}{(2K+1)} \langle 1010 | L'0 \rangle \langle L'010 | L0 \rangle \times \langle 1010 | K'0 \rangle \langle K'010 | K0 \rangle \langle 1m_1 1m_2 | L'M' \rangle \langle L'M'1 - m'_1 | LM \rangle \langle 1m'_1 1 - m'_2 | K'N' \rangle \langle K'N'1 - m'_3 | KN \rangle \times \langle \lambda 0 L0 | K0 \rangle \langle \lambda\mu LM | K - N \rangle Y_{\lambda\mu}(\Omega_q) \int \exp(-3r^2/r_0^2) J_{\lambda+\frac{1}{2}}(qr) r^{1/2} dr, \quad (43)$$

$$D_4(q) = F(q) \frac{84 \cdot 3^3 C_{11}^2}{2^3 \pi^2 r_0^6}.$$

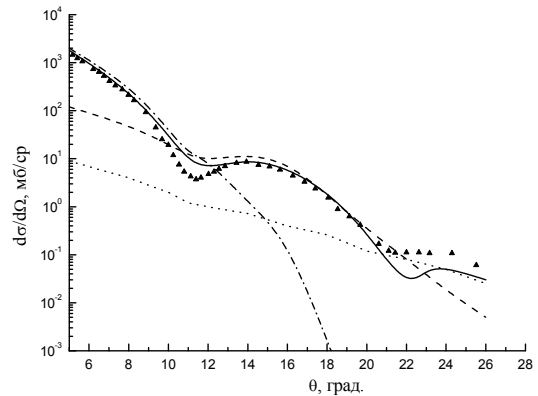
$C_{00}$ ,  $C_{11}$  – нормировочные коэффициенты радиальных волновых функций, формулы (5), (6).

### Анализ результатов

Проведен расчет дифференциальных сечений рассеяния протонов на ядрах  $^{13}\text{C}$  и  $^{15}\text{C}$  при энергии 1 ГэВ в глауберовской теории. В операторе многократного рассеяния учитывались одно-, двух- и трехкратные соударения

На рис. 1 приведены дифференциальные сечения упругого  $p^{13}\text{C}$ -рассеяния при  $E = 1.0$  ГэВ с учетом одно- (штрих-пунктир), двух- (штриховая), трехкратных (точки) соударений и суммарное сечение (сплошная кривая). Экспериментальные данные из [4]. Из рисунков видно, что при малых углах доминирует однократное рассеяние, по мере увеличения угла однократное быстро уменьшается, с ним сравнивается двукратное, и им определяется поведение сечения при промежуточных углах. При дальнейшем увеличении угла, когда сечения двукратных соударений уменьшаются, начинают играть роль трехкратные соударения, они и описывают поведение сечения. В точках равенства парциальных сечений возникают минимумы, поскольку ряд многократного рассеяния знакопеременный. При энергии 1 ГэВ преимущественный вклад однократных столкновений наблюдается только до углов  $11^\circ$ , двукратных – до  $21^\circ$ , трехкратных – свыше  $22^\circ$ . В суммарном дифференциальном

сечении присутствуют все кратности. Расчет правильно передает поведение дифференциального сечения, небольшие расхождения имеются в минимумах, поскольку эта область наиболее чувствительна к структуре волновой функции и к динамике взаимодействия.



**Рисунок 1** – Вклад в дифференциальное сечение  $p^{13}\text{C}$ -рассеяния: одно- (штрих-пунктир), двух- (пунктир), трех- (точки) кратные соударения и их сумма (сплошная кривая) при  $E = 1.0$  ГэВ

На рис. 2 показан вклад нескольких первых кратностей рассеяния в дифференциальное сечение  $p^{15}\text{C}$ -рассеяния. Каждый последующий член ряда (5) дает вклад на порядок меньше предыдущего. Как неоднократно указывалось в литературе [5], члены ряда многократного

рассеяния с увеличением угла рассеяния убывают неравномерно: однократное рассеяние убывает очень быстро и уже в области углов  $\theta \sim 14^\circ$  его вклад в дифференциальное сечение становится ничтожно малым; двукратное же рассеяние, будучи при малых углах  $\theta < 10^\circ$  гораздо меньше однократного, в области  $20^\circ > \theta > 12^\circ$  начинает доминировать и дает основной вклад в дифференциальное сечение; член трехкратного рассеяния, на два порядка меньше однократного при нулевом угле, сравнивается с двукратным при  $\theta \sim 20^\circ$  и дает основной вклад в сечение при  $\theta > 20^\circ$ . В областях, где кривые одно- двух- и трехкратных соударений пересекаются (т.е. там, где дифференциальные сечения сравниваются по абсолютной величине), возникают интерференционные минимумы, т.к. ряд (5) знакопеременный и при возведении матричного элемента в квадрат перекрестные члены вычитаются. Как видно из результата нашего расчета, чтобы описать поведение дифференциального сечения в широком угловом диапазоне, необходимо учитывать не только однократное, но и высшие кратности рассеяния. Этот же результат демонстрирует довольно быструю сходимость ряда многократного рассеяния (при заданной энергии 1 ГэВ/нуклон), когда достаточно ограничиться трехкратным рассеянием, т.к. в области малых углов рассеяния (где правомочен расчет по теории Глаубера) кратности выше третьей не будут давать заметного вклада в сечение.

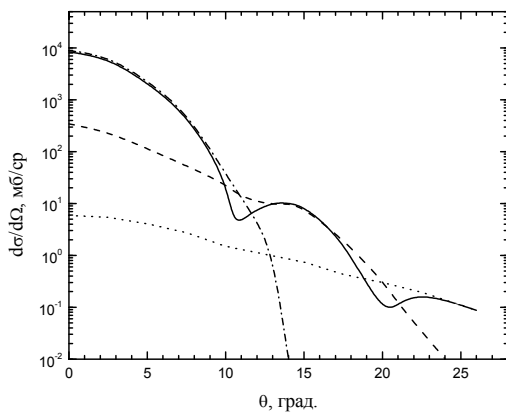


Рисунок 2 – То же, что на рис. 1 для  $p^{15}\text{C}$ -рассеяния

Структура основных состояний ядер  $\text{C}^{13}$  и  $\text{C}^{15}$  различная. Если основное состояние ядра  $\text{C}^{13}$  имеет конфигурацию  $|(1s)^4(1p)^9: J^\pi, T = 1/2^-, 1/2$

$\rangle$ , то ядро  $\text{C}^{15}$  в основном состоянии есть  $|(1s)^4(1p)^{10} 2s_{1/2}: J^\pi, T = 1/2^+, 3/2 \rangle$ . Структура  $\text{C}^{15}$  в основном состоянии близка к структуре возбужденного состояния в ядре  $\text{C}^{13}$  с  $J^\pi = 1/2^+$  при  $E \sim 4$  МэВ и имеет вид  $|(1s)^4(1p)^8 2s_{1/2}: J^\pi, T = 1/2^+, 1/2 \rangle$ .

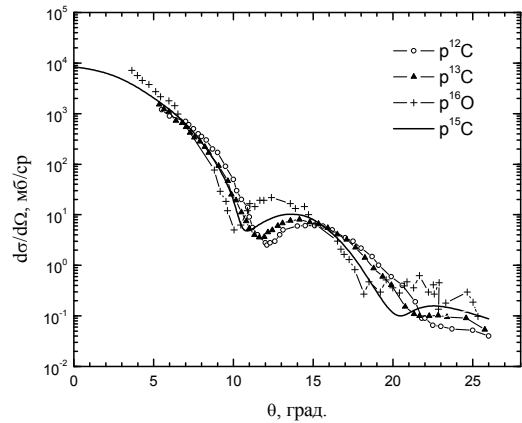


Рисунок 3 – Сравнение дифференциальных сечений на ядрах  $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$ ,  $^{15}\text{C}$ ,  $^{16}\text{O}$  при энергии  $E=1,0$  ГэВ/нуклон. Экспериментальные данные для  $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$  взяты из [6], для  $^{16}\text{O}$  – из [7]

На рис. 3 продемонстрированы дифференциальные сечения на ядрах  $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$ ,  $^{15}\text{C}$ ,  $^{16}\text{O}$  при энергии  $E = 1.0$  ГэВ. Сравнение сечений показывает, что с увеличением числа нуклонов несколько увеличивается сечение при нулевом угле рассеяния, что отражает рост среднеквадратичного радиуса (от  $R_{rms} = 2,32$  фм для  $^{12}\text{C}$ , до  $R_{rms} = 3,42$  фм для  $^{16}\text{O}$ ) и минимум сечения смещается в область меньших углов рассеяния. Положение и величина минимумов отличаются значительно, поскольку рисунок по оси ординат приведен в логарифмическом масштабе. Результат, полученный нами для ядра  $^{15}\text{C}$ , не противоречит экспериментальным данным, полученным для других изотопов углерода и для ядра  $^{16}\text{O}$ .

### Выводы

В работе представлена техника расчета матричного элемента упругого рассеяния протонов на ядре  $^{13}\text{C}$  в рамках дифракционной глауберовской теории. Пренебрежение «малыми» ядерными импульсами  $\vec{Q}_i$  по сравнению с переданным  $\vec{q}$ , сделанное в ходе расчета, позволило

просуммировать весь ряд многократного рассеяния, а использование оболочечных волновых функций в базисе гармонического осциллятора обеспечило вычисление динамических интегралов (зависящих от оператора рассеяния в обкладках волновых функций) аналитически. Выведенная расчетная формула матричного элемента представляет собой произведение двух сомножителей, один из которых есть сумма ряда многократного рассеяния, другой отвечает за рассеяние на нуклонах из разных оболочек ядра  $^{15}\text{C}$ . Таким образом, стало возможным рассчитать вклад в дифференциальное сечение и от разных кратностей рассеяния, и от рассеяния на нуклонах, находящихся на разных оболочках.

Рассчитав вклад в дифференциальное сечение от первых трех членов ряда многократного рассеяния, мы показали, что однократные соударения доминируют при самых малых углах рассеяния, до  $\theta < 12^\circ$ , двукратные – в области вто-

рого максимума в сечении  $20^\circ > \theta > 12^\circ$ , трехкратные – в области третьего максимума при  $\theta > 20^\circ$ . В точках пересечения разных кратностей рассеяния в дифференциальных сечениях появляются характерные интерференционные минимумы поскольку ряд многократного рассеяния знакопеременный и перекрестные члены вычитаются из общей суммы.

Отсутствие экспериментальных данных для  $p^{15}\text{C}$ -рассеяния мотивировало нас провести сравнение дифференциальных сечений близких изотопов углерода  $^{12}\text{C}$  и  $^{13}\text{C}$  и ядра  $^{16}\text{O}$  при энергии 1 ГэВ, для которых данные имеются. Сечение для  $p^{15}\text{C}$ -рассеяния повторяет характерные особенности других, соглашаясь с ними и по абсолютной величине и по положению минимумов и максимумов. Из-за отсутствия экспериментальных данных для  $p^{15}\text{C}$ -рассеяния мы провели сравнение рассчитанных дифференциальных поперечных сечений для близких изотопов.

#### Литература

- 1 Бояркина А.Н. Структура ядер 1р-оболочки. – Москва: Изд. МГУ, 1973. – 62 с.
- 2 Ибраева Е.Т., Жусупов М.А., Имамбеков О., Нурбакова Г. Применение дифракционной теории к рассеянию протонов на ядрах  $^{14}\text{C}$  и  $^{15}\text{C}$  в инверсной кинематике // Изв.РАН. Сер. физ. – 2009. – т.73, № 6 – с.892-897; Bull of Russ.Acad. of Science: Phys. 2009, v.73, № 6, pp. 845-851.
- 3 Неудачин В.Г., Смирнов Ю.Ф. Нуклонные ассоциации в легких ядрах. – М.: Наука. 1969. – 414 с.
- 4 Алхазов Г. Д. Распределение нейтронов в ядрах // ЯФ. – 1978. – Т.42, № 11. – С.2218-2233.
- 5 Glauber R.J. In Lectures in Theoretical Physics. – New York: Interscience, 1959. – Vol. 1. – P.315.
- 6 Palevsky H. et al. Elastic Scattering of 1-BeV Protons from Hydrogen, Helium, Carbon, and Oxygen Nuclei // Phys.Rev.Lett. – 1967. – Vol.18, No 26. – P.1200-1204.
- 7 Алхазов Г.Д., Анисович В.В., Волковицкий П.Э. Дифракционное взаимодействие адронов с ядрами при высоких энергиях. – Л.: Наука, 1991. – 224 с.

#### References

- 1 A.V. Boyarkina Struktura yader 1p-obolochki. – Moskva: Izd. MGU, 1973. – 62 s. (in russ).
- 2 Ye.T. Ibrayeva, M.A. Zhusupov, O. Imambekov, G. Nurbakova, Izv.RAN. Ser.fiz., 73(6), 892-897, (2009). (in russ); Bull of Russ.Acad. of Science: Phys., 73(6), 845-851, (2009).
- 3 V.G. Neudatchin, Yu.F. Smirnov Nuklonnye assotsiatsii v lyogkih yadrah. M.: Nauka. 1969. 414 s. (in russ).
- 4 G.D. Alkhazov, YaF, 42(11), 2218-2233, (1978). (in russ).
- 5 R.J. Glauber, in Lectures in Theoretical Physics (Interscience, New York, 1959), 1, 315.
- 6 H. Palevsky et al., Phys.Rev.Lett., 18(26), 1200-1204, (1967).
- 7 G.D. Alkhazov, V.V. Anisovich, P.E. Volkovitsy, Dofraktsionnoe vzaimodeistvie adronov s yadrami pri vysokih energiyah. L.: Nauka, 1991, 224 s. (in russ).