

жүйедегі сигналды беруге оңтайландыруға мүмкіндік беретін. Дәлірек айтсақ, кіріс шуылдың амплитудасы нөл емес кезінде сигнал беруінің сапалығын көрсететін мера максимум көрсетсе, біз стохастикалық резонанс туралы айтамыз. Бұл мақалада Дуффинг осциллятор мысалында динамикалық бейсызық жүйелерде стохастикалық резонансты сандық талдау нәтижелері келтірілген. Сандық зерттеулер MatLab ортасында жүргізілді.

Түйін сөздер: сигнал/шуыл, стохастикалық резонанс, Дуффинг осциллятор.

Введение

Одной из основных особенностей сложных самоорганизующихся систем является множество априорно доступных состояний [1]. Это придает их эволюции элемент неожиданности, отражаемый способностью выбирать между несколькими результатами и сопутствующей трудностью наблюдателя локализовать фактическое состояние в пространстве состояний. Это напоминает центральную проблему теории информации и коммуникации, а именно, как распознать конкретный сигнал, размытый шумом среди множества сигналов, испускаемых источником. В некоторых системах шум может оптимизировать передачу сигнала – то есть, добавление заданного количества шума на входе может увеличить отношение сигнал/шум на выходе. Это явление называется стохастический резонанс (СР) и является одним из самых интересных тем в современных исследованиях шума. СР наблюдается в бистабильных и моностабильных динамических систем, пороговых устройств, лазерах и т.д. [1-5]. СР был продемонстрирован экспериментально в самых разных условиях. Например, в [3] пересмотрены методы, используемые для демонстрации стохастического резонанса в моделях одиночных нейронов. Впервые упоминание о СР в литературе была статья Бензи и др. [4], в которой СР был предложен в качестве средства объяснения периодического повторения ледниковых периодов. Затем экспериментально было продемонстрировано наличие СР в бистабильном кольцевом лазере [5].

В настоящее время существует множество разнообразных моделей СР. Принимая во внимание прогресс, достигнутый как в теоретическом понимании, так и в практическом применении этого явления, в данной статье рассмотрены вопросы реализации СР в динамических нелинейных системах. Особое внимание уделено демонстрации явления СР с помощью осциллятора Дуффинга со случайным псевдобелым шумом [6-7].

Улучшение отношения сигнал/шум стохастическим резонансом

В общем случае любая динамика, даже линейная, имеет периодический отклик на периодическое воздействие. Однако поведение отклика немонотонно. В нелинейной системе максимальная периодическая компонента наблюдается при конечной оптимальной интенсивности шума. График зависимости отклика системы от интенсивности шума напоминает резонансную кривую для линейного диссипативного осциллятора. При вариации интенсивности шума меняется средняя частота переключений. В результате подбором интенсивности шума можно управлять разностью между частотой воздействия и частотой переключений. При оптимальном уровне шума эти частоты оказываются близкими. Изменение уровня шума приводит к совпадению временных масштабов на низких частотах, меньших скорости релаксации. При малой интенсивности шума средние времена выхода достаточно велики и намного превышают период сигнала модуляции. При высоком уровне шума за время одного периода сигнала система с высокой степенью вероятности совершит многократные переключения. Варьируя интенсивность шума, можно обеспечить режим, когда среднее время переходов через барьер будет близко к периоду модулирующего сигнала. Переключения системы будут происходить в среднем с частотой внешней периодической силы. Таким образом, путем изменения уровня шума можно настроить стохастическую бистабильную систему в режим максимального усиления модулирующего сигнала и отношения сигнал/шум. Всё вышеописанное можно проиллюстрировать следующим образом.

Рассмотрим бистабильную систему на примере двойной потенциальной ямы (рис.1). Бистабильные системы – это системы, имеющие при одном и том же входе и более устойчивые к малым возмущениям состояния. При достаточном наружном воздействии такая система может перейти из одного состояния другое. Если

достаточное наружное воздействие периодическое, то система, так же, будет временами перебегать из одного в другое состояние (рис.2). Если наружное воздействие хаотично (шум), то система хаотически «блуждает», и спустя неопределённое время, средняя длина которого находится в зависимости от мощности шума, может проскочить из одного положения в другое. Динамика таких скачков будет хаотичной. При достаточной дозе шума «грустное лицо» делается счастливым, при этом синхронизируются прыжки в глобально стабильное состояние (в статистически среднем).

Пусть частица с массой m и вязким трением g движется в симметричном двойном потенциале $V(x)$ (рис. 1):

$$V(x) = \frac{1}{4} bx^4 - \frac{1}{2} ax^2. \quad (1)$$

Минимумы находятся на $\pm x_m$, где $x_m = (a/b)^{1/2}$. Они разделены потенциальным барьером с высотой $\Delta V = a^2/(4b)$. Барьер локализован на $x_b = 0$. При наличии периодического воздействия потенциал двойной ямы

$$V(x, t) = V(x) - A_0 x \cos(\Omega t) \quad (2)$$

наклонена назад и вперед, тем самым повышая и понижая последовательно потенциальные барьеры правой и левой лунок, соответственно, антисимметричным образом. В такой потенциальной яме частица подвержена флуктуационным силам, которые вызывают переходы между соседними потенциальными ямами со скоростью, определяемой известной скоростью Крамерса [8]:

$$r_k = \frac{\omega_0 \omega_b}{2\pi\gamma} \exp\left(\frac{\Delta V}{D}\right), \quad (3)$$

где $\omega_0^2 = V''\left(\frac{x_m}{m}\right)$ – квадрат угловой частотой потенциала в потенциальных минимумах при $\pm x_m$; $\omega_b^2 = \left|\frac{V''(x_b)}{m}\right|$ – квадрат угловой частоты в верхней части барьера, расположенная в точке x_b ; ΔV – высота потенциального барьера, разделяющего два минимума. Сила шума $D = k_B T$ связана с температурой T . Если мы применим слабое периодическое воздействие к частице, то потенциал двойной ямы асимметрично наклоняется вверх и вниз, периодически поднимая и

опуская потенциальный барьер, как показано на рис. 2.

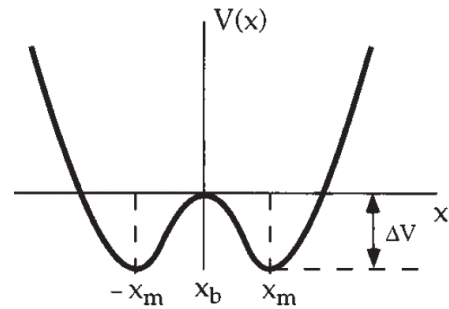


Рисунок 1 – Бистабильная система

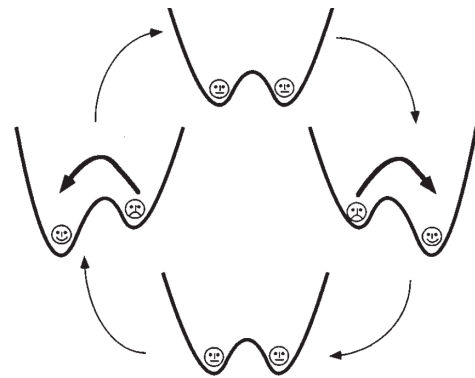


Рисунок 2 – Перескок под действием внешней силы

Несмотря на то, что периодическое воздействие извне слишком слабое, чтобы периодически вращать частицу из одной потенциальной ямы в другую, шумовой прыжок между потенциальными ямами может синхронизироваться со слабым периодическим воздействием. Такая статистическая синхронизация имеет место, когда среднее время ожидания $T_k(D) = 1/r_k$ между двумя индуцированными помехами междолинными переходами сравнимо с половиной периода периодического воздействия T_Ω . Это дает условие согласования временного масштаба для стохастического резонанса:

$$2T_k(D) = T_\Omega. \quad (4)$$

Т.е. стохастический резонанс в симметричном двулучевом потенциале проявляется в синхронизации активированных событий прыжков между потенциальными минимумами со слабым периодическим воздействием. В течение заданного периода действия T_Ω условие согласования

по времени может быть выполнено путем настройки уровня шума D_{max} на величину, определяемую уравнением (4).

Мы принимаем здесь следующее определение отношения сигнал/шум:

$$SNR = 2 \left[\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \int_{\Omega-\Delta\omega}^{\Omega+\Delta\omega} S(\omega) d\omega \right] / S_N(\Omega). \quad (5)$$

Здесь

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \langle x(t+\tau)x(t) \rangle d\tau \quad (6)$$

спектральная плотность мощности. Внутренние скобки обозначают среднее значение ансамбля по реализациям шума, внешние – усреднение по начальной фазе входного сигнала. Качественно

$$S(\omega) = \left(\frac{\pi}{2}\right) \bar{x}(D)^2 [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)] + S_N(\omega) \quad (8)$$

где $S_N(\omega) = S_N^0(\omega) + O(A_0^2)$.

Объединив уравнения (7) и (8), отношение SNR для симметричной бистабильной системы будет равен:

$$SNR = \pi \left(\frac{A_0 x_m}{D}\right)^2 r_K. \quad (9)$$

Коэффициент 2 в (5) был введен для удобства с учетом симметрии спектральной плотности мощности $S(\omega) = S(-\omega)$. Т.е. отношение сигнал/шум определяется как отношение спектральных плотностей мощности сигнала и шума на частоте сигнала. При гармоническом сигнале на входе такому определению в эксперименте отвечает отношение

$S(\omega)$ можно описать как суперпозицию спектральной плотности фоновой мощности $S_N(\omega)$ и структуру дельта-спайков, центрированных по $\omega = (2n + 1)\Omega$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Для малых амплитуд усиления $S_N(\omega)$ не сильно отклоняется от спектральной плотности мощности $S_N^0(\omega)$ невозмущенной системы. Для бистабильной системы с частотой релаксации $2r_K$ скачкообразный вклад в $S_N^0(\omega)$ запишется, как

$$S_N^0(\omega) = \frac{4r_K \langle x^2 \rangle_0}{4r_K^2 + \omega^2}. \quad (7)$$

При добавлении спектральной плотности мощности любой из компонент можно получить следующим образом:

высоты спектральной линии сигнала модуляции над шумовым основанием к высоте шумового основания в спектре выходного сигнала. Результаты представляются либо в линейном, либо в логарифмическом масштабах. Таким образом, стохастический резонанс характеризуется увеличением отношения выходного сигнала к SNR по мере увеличения уровня шума. SNR для спектральной плотности мощности, изображенной на рис. 3 (а) с частотой ν , показано на рис. 3 (б). Интенсивность шума $\overline{D_{SR}}$, при которой SNR принимает свой максимум, не совпадает со значением D_{SR} , которое максимизирует амплитуду отклика \bar{x} или эквивалентно силе дельта-всплеска в спектре мощности, заданном уравнением (8).

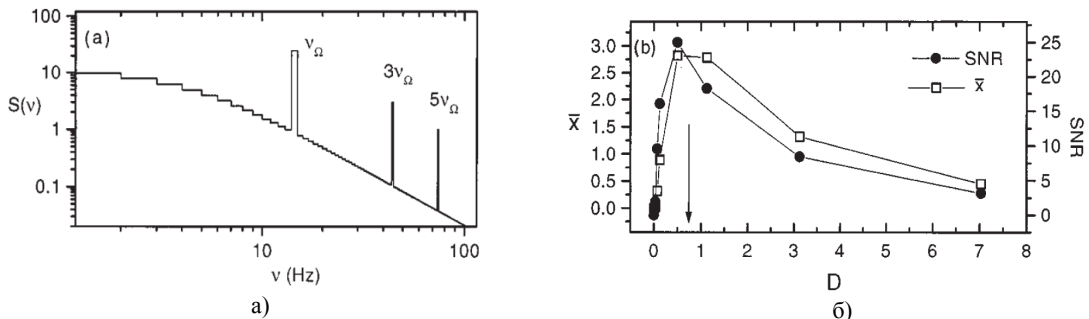


Рисунок 3 – Спектральная плотность мощности (а) и зависимость амплитуды \bar{x} и отношения сигнал/шум от интенсивности внешнего воздействия

Таким образом, наблюдаемый сигнал сопоставляется с интенсивностью шума на выходе системы, т.е. необходимо определить выходное отношение сигнал/шум.

Общей мерой, примером которой является вышеупомянутый пример симметричного бистабильного потенциала, является отношение сигнал/шум или SNR. По существу, SNR обеспечивает меру относительного вклада в общую мощность ответа от его компонентов сигнала и шума.

Эффект стохастического резонанса в осцилляторе Дюффинга

Двумерная модель осциллятора Дюффинга, управляемая слабым периодическим сигналом и шумами задается следующим образом [6]

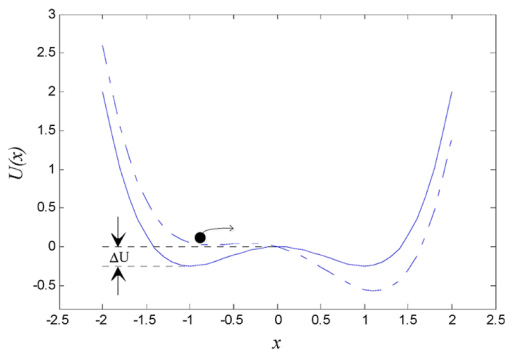
$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} - \alpha x^3 + \beta x = A \sin(\omega_0 t) + F(t) \quad (10)$$

$$V(x) = U(x) - xA \sin(\omega_0 t) = -\alpha x^2 / 2 + \beta x^4 / 4 - xA \sin(\omega_0 t). \quad (11)$$

В итоге потенциальные ямы периодически поднимаются и опускаются. Броуновские частицы под воздействием шума могут приобретать энергию, достаточную для перескока из потенциальной ямы. Какая-то часть энергии шума передается сигналу, усиливая его. Скорость Крамерса определяем по формуле:

$$r_k = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi k}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4\beta d}\right), \quad (12)$$

где d – интенсивность шума.



Сплошная линия – до воздействия, пунктирная – после воздействия силы извне.

Рисунок 4 – Потенциальная функция в осцилляторе Дюффинга

где γ – коэффициент демпфирования, $-\alpha x^3 + \beta x$ – сила в потенциальном поле с потенциалом $U(x) = -\alpha x^2 / 2 + \beta x^4 / 4$, α и β – положительные параметры системы, $s(t) = A \sin(\omega_0 t)$ – гармонический сигнал с амплитудой A , частотой ω_0 , $F(t)$ – гауссовский белый шум

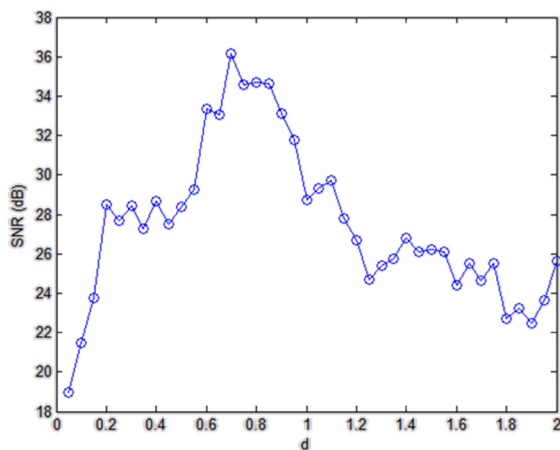
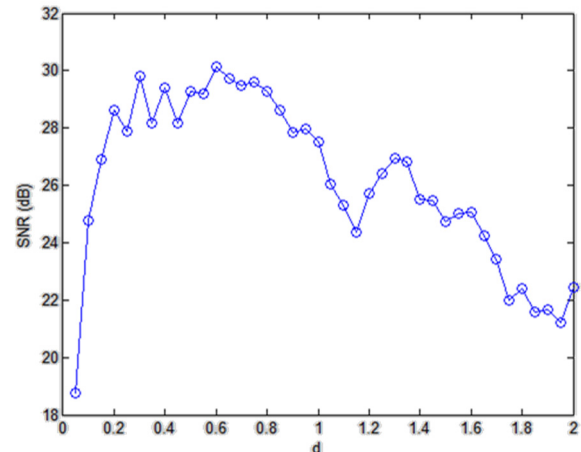
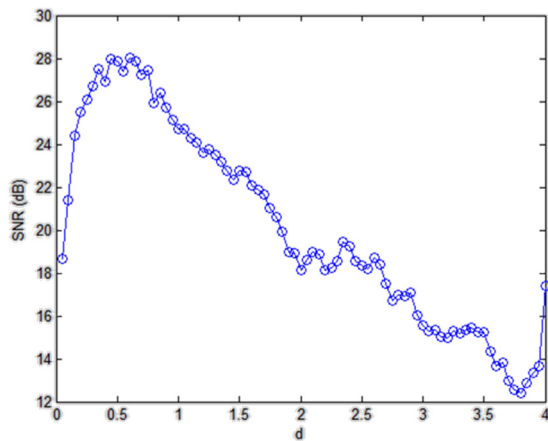
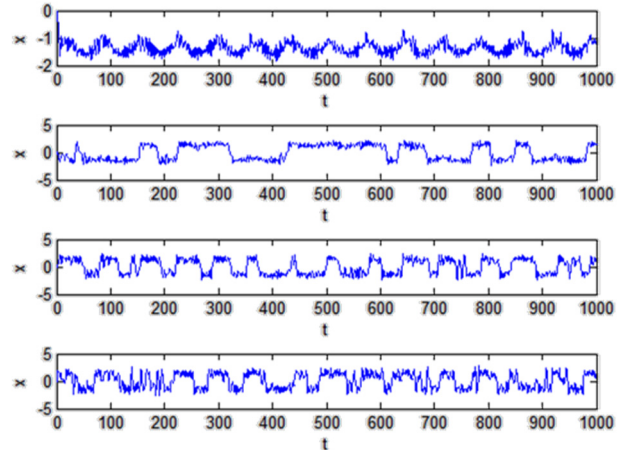
Из рисунка 4 видно, что при отсутствии сигнала и шума, т.е. при $A = 0$ и $F(t) = 0$, потенциальная функция характеризует потенциальное поле с двумя устойчивыми $x_{m1, m2} = \pm \sqrt{\alpha / \beta}$ и одной неустойчивой $x_b = 0$ точками. Высота потенциального барьера $\Delta U = \alpha^2 / (4\beta)$. Если же есть периодический сигнал ($A \neq 0$), но нет шума ($F(t) = 0$), то потенциальная функция модифицируется:

Нами был вычислен в программе MatLab зависимость SNR от интенсивности шума d с использованием следующей процедуры:

1. для каждого значения интенсивности шума d , численно интегрировать, чтобы получить $x_i(t; d)$;
2. рассчитать частотный спектр из $x_i(t; d) \rightarrow |X_i(\omega; d)|$ и $\text{noise}_i(t; d) \rightarrow |N_i(\omega; d)|$;
3. для $i = 1, \dots, M$, средняя $|X_i(\omega; d)| \rightarrow |X(\omega; d)|$ и $|N_i(\omega; d)| \rightarrow |N(\omega; d)|$;
4. интеграция $|X(\omega; d)|$ and $|N(\omega; d)|$ в области $\Delta\omega$ вокруг ω_0 ;
5. вычислить SNR (дБ) в зависимости от d , $SNR = 10 \log(P_{\text{signal}}/P_{\text{noise}})$.

Результат представлен на рисунке 5. По мере того как интенсивность шума d увеличивается, SNR возрастает до максимального значения при $d \sim 0,7$ (рис.5а), а затем уменьшается по мере увеличения d . Так как в качестве шума нами взят случайный белый шум, то значение SNR может меняться, например, при $N=1\ 500$ (рис.5б) SNR максимума достигает при $d = 0,7$. При $N=2\ 000$ (рис.6) максимальное значение SNR достигается при значении $d = 0,5$, при этом, по сравнению с предыдущими результатами, видим уменьшение значения SNR.

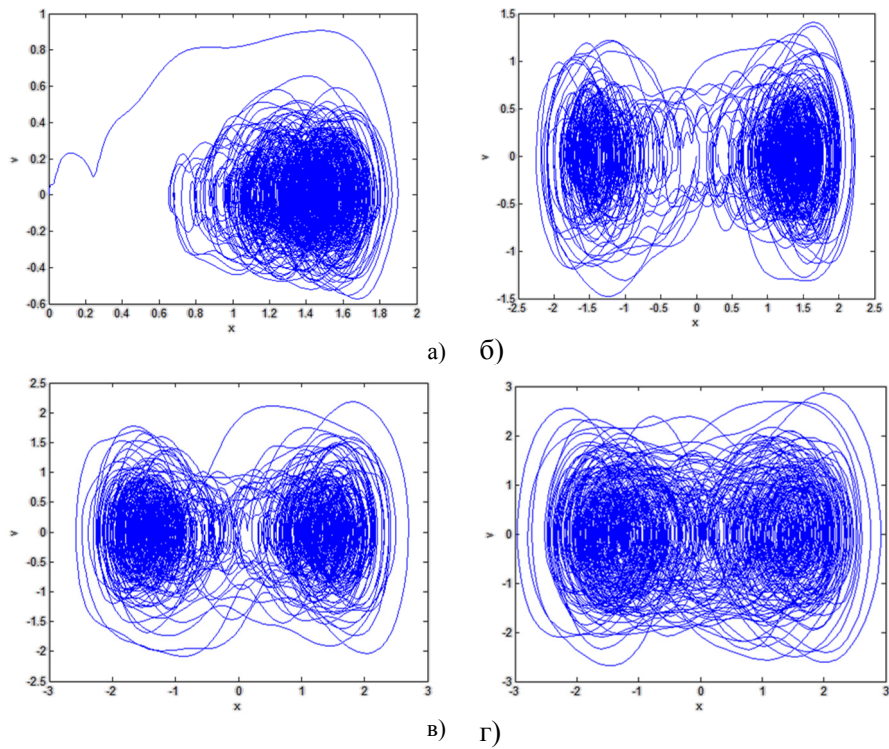
Из рисунке 7 можно видеть, как увеличение интенсивности шума может влиять на выходной сигнал.

а) $N=1000$ – количество точек шумаб) $N=1500$ **Рисунок 5** – Зависимость SNR от интенсивности шума d **Рисунок 6** – Зависимость SNR от интенсивности шума d при $N = 2000$ **Рисунок 7** – Изменение вида сигнала при $d = 0.1, 0.5, 1.5, 4$ соответственно

Далее нами были рассмотрены фазовые портреты осциллятора при вышеуказанных значениях интенсивности шума. Результаты представлены на рисунке 8. При $d = 0.1$ фазовая траектория медленно начинает по спирали стягиваться в одну точку, т.е. фазовая траектория стремится к предельному циклу (устойчивый цикл). При $d = 0.1, 1.5$ и 4 наблюдаем двойную спираль, что соответствует движению в двух потенциальных ямах.

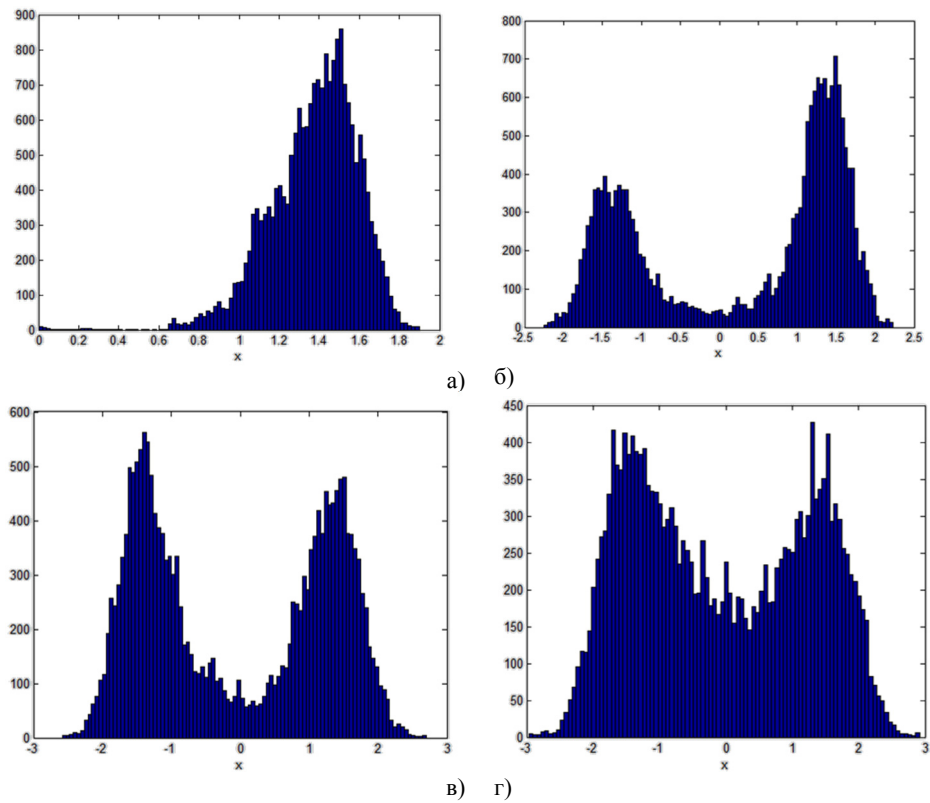
Также данный вывод мы можем видеть в картинах потенциальных ям (рисунок 9). Видно,

что при малых значениях интенсивности шума $d < 0.5$ (рисунок 9), система осциллирует в одной яме большую часть времени. При $d = 0.5$ энергии шума достаточно лишь для того, чтобы перекинуть малую часть частиц во вторую потенциальную яму, т.е. интенсивности шума при таком его значении недостаточна для усиления слабого сигнала. Далее при увеличении d количество частиц примерно одинаково в обоих ямах, хотя только 50-60 частиц могут свободно передвигаться в них. При $d = 4$ (рис. 9г) больше частиц смогли преодолеть потенциальный барьер.



$d = 0.1$ (а), 0.5 (б), 1.5 (в), 4 (г)

Рисунок 8 – Фазовые портреты системы Дуффинга при различных значениях d



$d = 0.1$ (а), 0.5 (б), 1.5 (в), 4 (г)

Рисунок 9 – Распределение частиц в потенциальных ямах

Заклучение

Таким образом, мы пришли к выводу, что при малых значениях интенсивности шума ($d < 0,5$) система большую часть времени колеблется вокруг одной устойчивой точки. При $d \sim 0,5$ система колеблется между потенциаль-

ными ямами. При увеличении интенсивности шума ($d > 0,5$), особенно, при $d = 4$, значение интенсивности шума хорошо подходит для усиления слабого сигнала и при котором наблюдается стохастический резонанс.

Данная работа частично была поддержана КН МОН РК в рамках гранта 3837/ГФ4.

Литература

- 1 Nicolis G., and Nicolis C. Stochastic Resonance, Self-Organization and Information Dynamics in Multistable Systems // Entropy. – 2016. – Vol.18(5). – P.172-185.
- 2 Yang J.H., Sanjuán M.A.F., Liu H.G., Litak G., Li X. Stochastic P-bifurcation and stochastic resonance in a noisy bistable fractional-order system // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2016. – Vol. 41. – P. 104-117.
- 3 McDonnell M.D., Iannella N., To M.-S., Tuckwell H.C., Jost J., Gutkin B.S. & Ward L.M. A review of methods for identifying stochastic resonance in simulations of single neuron models // Network: Computation in Neural Systems. – 2015. – Vol.26(2). – P.35-71.
- 4 Benzi R., Sutera A., and Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance // J. Phys. A: Mathematical and General. – 1981. – Vol. 14(11). – P.L453–L457.
- 5 Wiesenfeld K., McNamara B. and Roy R. Observation of stochastic resonance in a ring laser // Phys.Rev. Lett. – 1988. – Vol. 60. – P.2626–2629.
- 6 Leng Y.G., Lai Z.H., Fan S.B., Gao Y.J. Large parameter stochastic resonance of two-dimensional Duffing oscillator and its application on weak signal detection // Acta Phys. Sin. - 2012. – Vol.61. – P. 230502.
- 7 Токмырзаева Ж.Б., Иманбаева А.К., Сыздыкова Р.Н. Численное исследование эффекта стохастического резонанса в нелинейных динамических системах // Proc. of the 10th conf. «Chaos and structures in nonlinear systems. Theory and experiment», Almaty, June 16-18, 2017. – P.328-332.
- 8 Gammaitoni L., Hañggi P., Jung P., Marchesoni F. Stochastic resonance // Reviews of Modern Physics. – 1998. – Vol. 70, No. 1. – P.223-287.

References

- 1 G. Nicolis, and C. Nicolis, Entropy, 18(5), 172-185, (2016).
- 2 J.H. Yang, M.A.F. Sanjuán, H.G. Liu, G. Litak, X. Li, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 41, 104-117, (2016).
- 3 M.D. McDonnell, Iannella N., M.-S. To, H.C. Tuckwell, J. Jost, B.S. Gutkin & L.M. Ward, Network: Computation in Neural Systems, 26(2), 35-71, (2015).
- 4 R. Benzi, A. Sutera, and A. Vulpiani, J. Phys. A: Mathematical and General, 14(11), L453–L457, (1981).
- 5 K. Wiesenfeld, B. McNamara and R. Roy, Phys.Rev. Lett., 60, 2626–2629, (1988).
- 6 Y.G. Leng, Z.H. Lai, S.B. Fan, Y.J. Gao, Acta Phys. Sin., 61, 230502, (2012).
- 7 Zh.B. Tokmyrzayeva, A.K. Imanbayeva, R.N. Syzdykova, Proc. of the 10th conf. “Chaos and structures in nonlinear systems. Theory and experiment”, Almaty, June 16-18, 2017, 328-332, (2017). (in russ.).
- 8 L. Gammaitoni, P. Hañggi, P. Jung, F. Marchesoni, Reviews of Modern Physics, 70(1), 223-287, (1988).